Bestimmung des Monotonieverhaltens einer Funktion

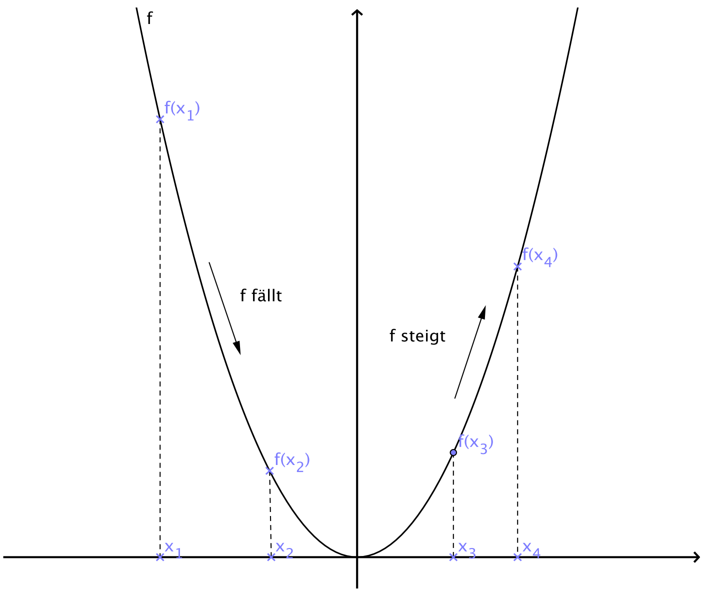
Funktionen enthalten oft Abschnitte (auch als Intervalle bezeichnet), bei denen die Funktionswerte mit zunehmendem x-Wert größer werden oder kleiner werden.

Die Funktion ist in diesem Abschnitt dann steigend oder fallend.

Vergleiche das mit unserer Skizze rechts:

Es gilt, dass x_2 größer ist als x_1, aber der Funktionswert $f(x_2)$ ist kleiner als $f(x_1)$. Somit ist f streng monoton fallend für alle $x < 0$.

Außerdem gilt, dass x_4 größer als x_3 ist. Ebenso ist der Funktionswert $f(x_4)$ größer als $f(x_3)$. Somit ist f streng monoton steigend für alle $x > 0$.



Für die rechnerische Bestimmung ist der folgende Satz hilfreich:

Monotoniesatz

Die Funktion f ist im Intervall I differenzierbar. Wenn für alle x aus I gilt:

i) $f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton steigend.
ii) $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton fallend.

Beispiel:

Wir wollen das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ untersuchen.

a) Zuerst bilden wir die erste Ableitung $f'(x) = -2x + 4$ und bestimmen ihre Nullstellen. Man erhält als einzige Nullstelle $x = 2$. Somit erhalten wir als Intervalle, die wir auf Monotonie untersuchen einmal $x < 2$ und einmal $x > 2$ (Die Intervalle liegen immer zwischen den Nullstellen der Ableitungsfunktion).

b) Wir untersuchen beide Intervalle jetzt einzeln:

$x < 2$:

Wir wählen $x = 0$ und berechnen $f'(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$. Die Funktion f ist also für alle $x < 2$ streng monoton steigend.

$x > 2$:

Wir wählen $x = 3$ und berechnen $f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -6 + 4 = -2 < 0$. Die Funktion ist also für alle $x > 2$ streng monoton fallend.

Tipp: Liegt der Graph der Ableitungsfunktion f' vor, so kann natürlich auch hiermit argumentiert werden.