Übungsaufgaben 1 Oktober 2011

Roman Deeken und Maik Urban

28. September 2011

1 Extremwertaufgaben

1. An welcher Stelle $x \in [0;1]$ ist die Differenz von $f(x) - g(x)$ mit $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^4$ am größten?

2. Ein achsenparalleles Rechteck liegt unter der Geraden mit der Gleichung $y = -0,4x + 2$. Welches dieser Rechtecke hat den größten Flächeninhalt. Wie groß kann der Flächeninhalt höchstens werden? Untersuche, ob auch der Umfang des gefundenen Rechtecks größer ist als die Umfänge aller anderen Rechtecke.

3. Sei $P(u|v)$ ein beliebgiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ wobei $x \in [-2;2]$ liegt. Bestimme P so, dass das Dreick ABP mit A(-2;0) und B (u;0) den größstmöglichen Flächeninhalt hat. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt. Für welchen Punkt T ist im Dreieck ABT die Summe der Kathetenlängen maximal? Wenn sich ein Dreieck ABP um die x-Achse dreht, so entsteht ein Kegel. Wie groß kann der Rauminhalt eines solchen Kegels höchstens werden?

4. Jede der Funktionen $f_t(x) = tx^3 + (t^2 + 1)x^2 + x$ mit $t > 0$ hat eine Wendestelle. Für welchen Wert von t liegt die Wendestelle am nächsten bei Null? Gib den zugehörigen Wendepunkt an.

5. Zeige: Der Graph der Funktionenschar $f_t(x) = -x^4 + 2x^3 - 2tx + t$ hat für jedes t zwei Wendepukte. Für welchen Wert von t haben die Wendepunkte den kleinsten Abstand voneinander?

6. Der Querschnitt eines Abwasserkanals hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Beim Bau des Kanals werden die Materialkosten wesentlich durch den Umfang des Querschnitts bestimmt. Wie groß, bei gegebenem Umfang u, muss das Verhältnis der Rechteckseiten gewählt werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

7. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.
   - Für welches $x \in [0;2]$ wird der Flächeninhalt des Rechtecks aus 0(0;0), P(u,0), Q(u,v) und R(0,v) maximal. Der Punkt P liegt auf dem Graphen von f.
   - Läßt man das Rechteck aus der Teilaufgabe a) um die y-Achse rotieren, entsteht ein Zylinder. Für welches $x \in [0;2]$ wird das Volumen maximal?
   - Die beiden Extremwert aus der Teilaufgabe a) und b) unterscheiden sind. Warum hat der Zylinder, der entsteht wenn man das größte Rechteck um die y-Achse rotiert nicht automatisch auch das größte Volumen?

2 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Bestimme in den folgenden Aufgabe die gesuchte Funktion!

1. Eine Funktion dritten Grades berührt im Ursprung die x-Achse. Die Tangente in P(-3,0) ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 6x$.
2. Eine Funktion dritter Ordnung hat in P(1;4) eine Tangente parallel zur x-Achse und in Q(0;2) ihren Wendepunkt.
3. Eine Funktion dritten Grades hat in O(0;0) die x-Achse und in A (2;2) die 1. Winkelhalbierende $y = x$ als Tangente.
4. Eine Funktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x-Achse als Wendetangente und in A(-1;-2) einen Tiefpunkt.
5. Eine Funktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der 2. Winkelhalbierenden $y = -x$ als Wendetangente und in $B\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ einen Tiefpunkt.
6. Eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion vom Grad 5 hat in O(0;0) die Gerade $y = 7x$ als Tangente und in P(1;0) einen Wendepunkt.

3 Funktionenscharen

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 - 3t^2x$. Für welchen Wert von t
   - geht der Graph durch A(3;0) bzw. durch B(2;6,25)
   - ist die 2. Winkelhalbierende Tangente im Ursprung
   - liegen die Extrempunkte auf der 2. Winkelhalbierenden
   - ist die Tangente im Schnittpunkt mit der positiven x-Achse parallel zur 1. Winkelhalbierenden?
2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + \frac{t}{2}x^2 + (t+1)x$.
   - Es gibt zwei Punkte, die auf allen Graphen liegen, Gib die Koordinaten an.
   - Zeige: Es gibt eine Stelle x_0 für welche die Tangenten aller Graphen parallel sind. Gib x_0 und die Steigung der Tangenten an.
   - Für welche Werte für t schneidet der Graph die 2. Winkelhalbierende einmal, zweimal oder dreimal?
   - Skizziere die Funktionenschar.

4 Lösungen

4.1 Extremwertaufgaben

1. Die Zielfunktion lautet: $A(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^4$.
   Bestimmung der Extremwerte:
   $A(x) = x^3 - x^4$
   $A'(x) = 3x^2 - 4x^3$
   $A''(x) = 6x - 12x^2$
   Notwendige Bedingung $A'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 4x^3 &= 0 \\
\frac{3}{4}x^2 - x^3 &= 0 \\
x^2\left(\frac{3}{4} - x\right) &= 0 \\
x^2 = 0 \vee \frac{3}{4} - x &= 0 \\
x = 0 \quad \vee & \quad x = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung $A'(x) = 0 \wedge A''(x) <> 0$
$A'\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \wedge A''\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{4} < 0$
$x = \frac{3}{4}$ ist also ein Maximum.
Randextrema $x = 0$ und $x = 1$
$A(0) = 0$
$A(1) = 0$

2. Flächeninhalt: Die Extremalbedingung lautet: $A = a \cdot b$, die Nebenbedingung $b = f(a)$. Damit ist die Zielfunktion

$$
\begin{aligned}
A(a) &= a \cdot (-0,4a + 2) = -0,4a^2 + 2a \\
A'(a) &= -0,8a + 2 \\
A''(a) &= -0,8
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung:$A'(a) = 0$

$$
\begin{aligned}
-0,8a + 2 &= 0 \\
a &= 2,5
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung:$A'(a) = 0 \wedge A''(a) <> 0$
$A'(2,5) = 0 \wedge A''(2,5) = -0,8$ $x = 2,5$ ist also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt $A(2,5) = 1,2$
Randextrema: $x = 0$ und $x = 5$ mit $A(0) = 0$ bzw. $A(5) = 5$
Umfang: Die Extremalbedingung lautet $L = 2a + 2b$ die Nebenbedingung $b = f(a)$. Damit ist die Zielfunktion $L(a) = 2a + 2(-0,4a + 2) = 2a - 0,8a + 4 = 1,2a + 2$. $L'(a) = 1,2$ $L''(a) = 0$ Da es keine Nullstellen der ersten Ableitung gibt, gibt es auch keine Extrema, d.h. die Umfänge der Rechtecke sind alle gleich.

3. Flächeninhalt: Die Extremalbedingung lautet $A = a \cdot b$, wobei die horizontale Länge a und die vertikale Seite ses Dreiecks b beträgt. Somit gilt (Nebenbedingung): $a = 2 + u$ und $b =$

$f(u)$

$$\begin{aligned}
A(u) &= \frac{1}{2}(2+u)\cdot\left(-\frac{1}{2}u^2+2\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}u\right)\left(-\frac{1}{2}u^2+2\right)\\
&= -\frac{1}{2}u^2+2-\frac{1}{4}u^3+u\\
&= -\frac{1}{4}u^3-\frac{1}{2}u^2+u+2\\
A'(u) &= -\frac{3}{4}u^2-u+1\\
A''(u) &= -\frac{3}{2}u-1
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $A'(u)=0$

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4}u^2-u+1=0\\
u^2+\frac{4}{3}u-\frac{4}{3}=0\\
u_1=-2\vee u_2=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: $A'(u)=0\wedge A''(u)<>0$
$A'\left(\frac{2}{3}\right)=0\wedge A''\left(\frac{2}{3}\right)=-2$ Für u_2 liegt also ein Maximum vor.
$A'(-2)=0\wedge A''(-2)=2$ Für u_1 liegt also ein Minimum vor.
$A\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{425}{81}$
Randextrema: $u=2$ und $u=-2$
$A(2)=0$ und $A(-2)=0$
Kathetenlänge: Die beiden Katheten sind a und b wie oben beschrieben. Die Extramalbedingung lautet also :$L=a+b$. Die Nebenbedingungen $a=2+u$ bzw. $b=f(u)$. Somit lautet die Zielfunktion:

$$\begin{aligned}
L(u) &= (2+u)+f(u)\\
&= 2+u-\frac{1}{2}u^2+2\\
&= -\frac{1}{2}u^2+u+4\\
L'(u) &= -u+1\\
L''(u) &= -1
\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung liefert $u=1$. Mit Hilfe der hinreichenden Bedingung sieht man, dass dies ein Maximum sein muss, mit $L(1)=4,5$. Die Randextrema lauten $u=-2$ bzw. $u=2$ mit $L(-2)=0$ und $L(2)=4$.
Kegel: Die Extremalbedingung lautet $V=\frac{1}{3}A_Gh$ mit den Nebenbedingungen $h=2+u$

und $A_G = \pi r^2$ wobei $r = f(u)$ ist. Damit lautet die Zielfunktion:

$$
\begin{aligned}
V(u) &= \frac{1}{3}\pi f(u)^2 (2+u) \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(-\frac{1}{2}u^2 + 2\right)^2 (2+u) \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}u^4 - 2u^2 + 4\right)^2 (2+u) \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{4}u^5 - 4u^2 - 2u^3 + 8 + 4u\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}u^5 + \frac{1}{2}u^4 - 2u^3 - 4u^2 + 4u + 8\right) \\
V'(u) &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5}{4}u^4 + 2u^3 - 6u^2 - 8u + 4\right) \\
V''(u) &= \frac{1}{3}\pi \left(5u^3 + 6u^2 - 12u - 8\right)
\end{aligned}
$$

Notwendinge Bedingung: $V'(u) = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\pi \left(\frac{5}{4}u^4 + 2u^3 - 6u^2 - 8u + 4\right) &= 0 \\
\frac{5}{4}u^4 + 2u^3 - 6u^2 - 8u + 4 &= 0
\end{aligned}
$$

Polynomdivision mit $u_1 = 2$, denn $V'(2) = 0$

$$
\begin{array}{l}
\left(\tfrac{5}{4}u^4 + 2u^3 - 6u^2 - 8u + 4\right) : \left(u - 2\right) = \tfrac{5}{4}u^3 + \tfrac{9}{2}u^2 + 3u - 2 \\
\underline{-\tfrac{5}{4}u^4 + \tfrac{5}{2}u^3} \\
\qquad \tfrac{9}{2}u^3 - 6u^2 \\
\qquad \underline{-\tfrac{9}{2}u^3 + 9u^2} \\
\qquad\qquad 3u^2 - 8u \\
\qquad\qquad \underline{-3u^2 + 6u} \\
\qquad\qquad\qquad -2u + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2u - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{4}u^4 + 2u^3 - 6u^2 - 8u + 4 &= 0 \\
u = 2 &\quad \vee \quad \frac{5}{4}u^3 + \frac{9}{2}u^2 + 3u - 2 = 0
\end{aligned}
$$

Polynomdivision mit $u_2 = -2$, denn $V'(-2) = 0$

$$
\begin{array}{l}
\left(\tfrac{5}{4}u^3 + \tfrac{9}{2}u^2 + 3u - 2\right) : \left(u + 2\right) = \tfrac{5}{4}u^2 + 2u - 1 \\
\underline{-\tfrac{5}{4}u^3 - \tfrac{5}{2}u^2} \\
\qquad 2u^2 + 3u \\
\qquad \underline{-2u^2 - 4u} \\
\qquad\qquad -u - 2 \\
\qquad\qquad \underline{u + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 = 2 \quad \vee \quad u_2 &= -2 \vee \frac{5}{4}u^2 + 2u - 1 = 0 \\
u_1 = 2 \quad \vee \quad u_2 &= -2 \vee \frac{5}{4}u^2 + 2u - 1 = 0 \\
u = 2 \quad \vee \quad u &= -2 \vee u_3 = \frac{2}{5} \vee u_4 = -2
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung: $V'(u) = 0 \wedge V''(u) <> 0$

$$
\begin{aligned}
V'(2) = 0 \quad &\wedge \quad V''(2) = \frac{14}{3}\pi > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\
V'(-2) = 0 \quad &\wedge \quad V''(-2) = -6\pi < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \\
V'\left(\frac{2}{5}\right) = 0 \quad &\wedge \quad V''\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{102}{25}\pi \Rightarrow \text{Maximum}
\end{aligned}
$$

Die beiden Randextrema existieren für $x = 2$ bzw. für $x = -2$. Die zweite Ableitung an der Stellen$x = -2$ zeigt ein Maximum an, jedoch ist es im Aufgabenkontext ein Mininum, da der Wert für die Höhe negativ wird, d.h. der gsucht maximale Flächeninhalt ist $V\left(\frac{2}{5}\right) = 9,265$.

4. $f_t(x) = tx^3 + \left(t^2 + 1\right)x^2 + x$ mit $t > 0$

$$
\begin{aligned}
f_t'(x) &= 3tx^2 + 2\left(t^2 + 1\right)x + 1 \\
f_t''(x) &= 6tx + 2(t^2 + 1) \\
f_t'''(x) &= 6t
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f_t''(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
6tx + 2\left(t^2 + 1\right) &= 0 \\
6tx &= -2\left(t^2 + 1\right) \\
x &= \frac{-\left(t^2 + 1\right)}{3t} \\
x &= \frac{-t^2 - 1}{3t}
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen $f_t''(x) = 0 \wedge f_t'''(x) \neq 0$.
$f_t''\left(\frac{-t^2-1}{3t}\right) = 0 \wedge f_t'''\left(\frac{-t^2-1}{3t}\right) = 6t \Rightarrow$ Wendestelle
Gesucht ist nun das Minimum der x-Werte der Wendestelle, also das Minimum der Funk-

tion $w(t)=\frac{-t^2-1}{3t}=-\frac{t}{3}-\frac{1}{3t}$

$$\begin{aligned}
w(t) &= -\frac{t}{3}-\frac{1}{3t}\\
w'(t) &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3t^2}\\
w''(t) &= -\frac{2}{3t^2}\\
\text{Notwendige Bedingung für Extrema: } w'(t) &= 0\\
-\frac{1}{3}+\frac{1}{3t^2} &= 0\\
\frac{1}{3} &= \frac{1}{3t^2}\\
3t^2 &= 3\\
t^2 &= 1\\
t=1 &\vee t=-1\\
\text{Hinreichende Bedingung für Extrema: } w'(t) &= 0 \wedge w''(t)\neq 0\\
w'(1)=0\wedge w''(1) &= \frac{2}{3}\Rightarrow \text{Minimum}\\
w'(-1)=0\wedge w''(-1) &= \frac{2}{3}\Rightarrow \text{Minimum}
\end{aligned}$$

Für die beiden Werte $t=1$ bzw. $t=-1$ liegt die Wendestelle am Nächsten bei 0. Der Entsprechende Wendepunkt lautet $(-\frac{2}{3};-\frac{2}{27})$.

5. $f_t(x)=-x^4+2x^3-2tx+t$

$$\begin{aligned}
f_t'(x) &= -4x^3+6x^2-2t\\
f_t''(x) &= -12x^2+12x\\
f_t'''(x) &= -24x+12
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f_t''(x)=0$

$$\begin{aligned}
-12x^2+12x &= 0\\
12x(-x+1) &= 0\\
x=0 &\vee x=1
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f_t''(x)=0\wedge f_t'''(x)\neq 0$

$$f_t''(0)=0\wedge f_t'''(0)=12\Rightarrow \text{Wendestelle mit } f_t(0)=t$$
$$f_t''(1)=0\wedge f_t'''(1)=-12\Rightarrow \text{Wendestelle mit } f_t(1)=1-t$$

Es gibt also zwei Wendepunkte. Die Abstandsfunktion, bzw. deren Ersatzfunktion lautet:

$$\begin{aligned}
A(t) &= 1^2+((1-t)-t)^2\\
&= 1+(1-2t)^2\\
&= 1+1-4t+4t^2\\
&= 2-4t+4t^2\\
A'(t) &= -4+8t\\
A''(t) &= 8
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte: $A'(t) = 0$

$$\begin{aligned} -4+8t &= 0 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $A'(t) = 0 \wedge A''(t) <> 0$.
$A'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \wedge A''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \Rightarrow$ Minimum.

6. Die Extremalbedingung lautet $A = a \cdot b + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi$[Rechteck+Halbkreis]
Die Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} U &= = 2a + b + \cdot \pi \cdot \frac{b}{2} \\ U &= 2a + b + \pi \frac{b}{2} \\ U - b - \pi \frac{b}{2} &= 2a \\ \frac{U - b - \pi \frac{b}{2}}{2} &= a \end{aligned}$$

Die Zielfunktion:

$$\begin{aligned} A(b) &= \left(\frac{U - b - \pi \frac{b}{2}}{2}\right) \cdot b + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi \\ &= \frac{Ub - b^2 - \frac{1}{2}\pi b^2}{2} + \frac{1}{2}\pi \frac{b^2}{4} \\ &= \frac{Ub}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{\pi b^2}{4} + \pi \frac{b^2}{8} \\ &= b^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{Ub}{2} \\ &= b^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + b\frac{U}{2} \\ A'(b) &= 2b\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{U}{2} \\ A''(b) &= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extrema: $A'(b) = 0$

$$\begin{aligned} 2b\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{U}{2} &= 0 \\ 2b\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) &= -\frac{U}{2} \\ -b\left(\frac{4+\pi}{4}\right) &= -\frac{U}{4} \\ b &= \frac{2U}{4+\pi} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Extrema: $A'(b) = 0 \wedge A''(b) <> 0$
$A'\left(\frac{u}{2+\pi}\right) = 0 \wedge A''\left(\frac{u}{2+\pi}\right) < 0 \Rightarrow$ Maximum. Nun muss man noch a ausrechnen und das Verhältnis bilden.

7. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

- Die Extremalbedingung lautet: $A = u \cdot v$. Die Nebenbedingung: $v = f(u)$. Damit lautet die Zielfunktion:

$$\begin{aligned} A(u) &= u \cdot \left(u^4 - 8u^2 + 16\right) \\ &= u^5 - 8u^3 + 16u \\ A'(u) &= 5u^4 - 24u^2 + 16 \\ A''(u) &= 20u^3 - 48u \end{aligned}$$

  Notwendige Bedingung für Extrema: $A'(u) = 0$

$$\begin{aligned} 5u^4 - 24u^2 + 16 &= 0 \\ u^4 - 4,8u^2 + 3,2 &= 0 \\ \left(u^2 - 2,4\right) = 2,56 & \\ u^2 = 4 &\vee u^2 = 0,8 \\ u = \pm 2 &= u = \pm\sqrt{0,8} \end{aligned}$$

  Hinreichende Bedingung für Extrema: $A'(u) = 0 \wedge A''(u) <> 0$

$$\begin{aligned} A'(2) = 0 &\wedge A''(2) = 64 \Rightarrow Minimum \\ A'(-2) = 0 &\wedge A''(-2) = -64 \Rightarrow Maximum \\ A'\left(\sqrt{0,8}\right) = 0 &\wedge A''\left(\sqrt{0,8}\right) = -\frac{64\sqrt{5}}{5} \Rightarrow Maximum \\ A'\left(-\sqrt{0,8}\right) = 0 &\wedge A''\left(-\sqrt{0,8}\right) = \frac{64\sqrt{5}}{5} \Rightarrow Minimum \end{aligned}$$

  Relevant für die Aufgabe sind die beiden Wert $u = 2$ und $u = \sqrt{0,8}$. Die Randextrema sind $u = 0$ bzw. $u = 2$ mit $A(0) = 0$ bzw. $A(2) = 0$. Das gesuchte Maximum ist $u = \sqrt{0,8}$ mit $A\left(\sqrt{0,8}\right) \approx 18,318$.

- Die Extremalbedingung lautet: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ und die Nebenbedingung $h = f(r)$. Damit lautet die Zielfunktion:

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 \cdot \left(r^4 - 8r^2 + 16\right) \\ &= \pi\left(r^6 - 8r^4 + 16r^2\right. \\ V'(u) &= \pi\left(6r^5 - 32r^3 + 32r\right) \\ V''(u) &= \pi\left(30r^4 - 96r^2 + 32\right) \end{aligned}$$

  Notwendige Bedingung für Extrema: $V'(u) = 0$

$$\begin{aligned} \pi\left(6r^5 - 32r^3 + 32r\right) &= 0 \\ 6r^5 - 32r^3 + 32r &= 0 \\ x \cdot \left(6r^4 - 32r^2 + 32\right) &= 0 \\ r = 0 &\vee 6r^4 - 32r^2 + 32 = 0 \\ r = 0 &\vee r^4 - \frac{16}{3}r^2 + \frac{16}{3} = 0 \\ r = 0 &\vee \left(r^2 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{9} \\ r = 0 &\vee r^2 = 4 \vee r^2 = \frac{4}{3} \\ r = 0 &\vee r = \pm 2 \vee r = \sqrt{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Extrema: $V'(u) = 0 \wedge V''(u) <> 0$

$$V'(2) = 0 \quad \wedge \quad V''(2) = 128\pi \Rightarrow Minimum$$
$$V'(-2) = 0 \quad \wedge \quad V''(-2) = 128\pi \Rightarrow Minimum$$
$$V'\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0 \quad \wedge \quad V''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{128}{3}\pi \Rightarrow Maximum$$
$$V'\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0 \quad \wedge \quad V''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{128}{3}\pi \Rightarrow Maximum$$
$$V'(0) = 0 \quad \wedge \quad V''(0) = 32\pi \Rightarrow Minimum$$

Relevant für die Aufgabe sind die beiden Wert $u = 2$,$u = 0$ und $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$. Die Randextrema sind $u = 0$ bzw. $u = 2$ mit $V(0) = 0$ bzw. $V(2) = 0$. Das gesuchte Maximum ist $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ mit $V\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \approx 29,787$.

4.2 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

1. Aufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Eigenschaft	Bedingung	Einsetzen
P(0;0)	$f(0) = 0$	$a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0$
Extrempunkt P(0;0)	$f'(0) = 0$	$3a0 + 2b0 + c = 0$
P (-3;0)	$f(-3) = 0$	$a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d = 0$
Steigung für x=-3 ist 6	$f'(-3) = 6$	$3a(-3)^2 + 2b(-3) + c = 6$

$$\left| \begin{array}{rcr} d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ -27a + 9b &=& 0 \\ 27a - 6b &=& 6 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{rcr} d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ -27a + 9b &=& 0 \\ 3b &=& 6 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{rcr} d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ -27a + 9b &=& \\ b &=& 2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{lcr} d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ a &=& -\frac{2}{3} \\ b &=& 2 \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$$

2. Aufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Eigenschaft	Bedingung	Einsetzen
P(1;4)	$f(1) = 4$	$a1^3 + b1^2 + c1 + d = 4$
Extrempunkt P(1;4)	$f'(1) = 0$	$3a1 + 2b1 + c = 0$
Q (0;2)	$f(0) = 2$	$a0^3 + b0^2 + c0 + d = 2$
Wendepunkt Q(0;2)	$f''(0) = 0$	$6a0 + 2b = 0$

$$\left|\begin{array}{ccc} a+b+c+d & = & 4 \\ 3a+2b+c & = & 0 \\ d & = & 2 \\ b & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a+c+2 & = & 4 \\ 3a+c & = & 0 \\ d & = & 2 \\ b & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a+c & = & 2 \\ 3a+c & = & 0 \\ d & = & 2 \\ b & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} -2a & = & 2 \\ 3a+c & = & 0 \\ d & = & 2 \\ b & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ c & = & 3 \\ d & = & 2 \\ b & = & 0 \end{array}\right|$$

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

3. Augabe

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Eigenschaft	Bedingung	Einsetzen
P(0;0)	$f(0) = 0$	$a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0$
Extrempunkt P(0;0)	$f'(0) = 0$	$3a0 + 2b0 + c = 0$
A (2;2)	$f(2) = 2$	$a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 2$
Steigung für x=2 ist 1	$f'(2) = 1$	$3a(2)^2 + 2b(2) + c = 1$

$$\begin{vmatrix} d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ 8a+4b & = & 2 \\ 12a+4b & = & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ 8a+4b & = & 2 \\ 4a & = & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ 8a+4b & = & 2 \\ a & = & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b & = & 1 \\ a & = & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

4. Aufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

Eigenschaft	Bedingung	Einsetzen
P(0;0)	$f(0) = 0$	$a0^4 + b0^3 + c0^2 + d0 + e = 0$
Wendepunkte P(0;0)	$f''(0) = 0$	$12a0^2 + 6b0 + 2c = 0$
Extrempunkt P(0;0)	$f'(0) = 0$	$4a0^3 + 3b0^2 + 2c0 + d = 0$
A(-1;-2)	$f(-1) = -2$	$a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + e = -2$
Extrempunkte A(-1;-2)	$f'(-3) = 0$	$4a(-1)^3 + 3b(-1)^2 + 2c(-1) + d = 0$

$$\begin{vmatrix} e & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ a-b & = & -2 \\ -4a+3b & = & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ a-b & = & -2 \\ -b & = & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ a & = & 6 \\ b & = & 8 \end{vmatrix}$$

$$f(x) = 6x^4 + 8x^3$$

5. Aufgabe

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c
\end{aligned}
$$

Eigenschaft	Bedingung	Einsetzen
P(0;0)	$f(0) = 0$	$a0^4 + b0^3 + c0^2 + d0 + e = 0$
Wendepunkte P(0;0)	$f''(0) = 0$	$12a0^2 + 6b0 + 2c = 0$
Steigung für x=0 ist -1	$f'(0) = -1$	$4a0^3 + 3b0^2 + 2c0 + d = -1$
A($\sqrt{2}$;$2\sqrt{2}$)	$f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$	$a\left(\sqrt{2}\right)^4 + b\left(\sqrt{2}\right)^3 + c\left(\sqrt{2}\right)^2 + d\left(\sqrt{2}\right) + e = 2\sqrt{2}$
Extrempunkte A($\sqrt{2}$;$2\sqrt{2}$)	$f'\left(\sqrt{2}\right) = 0$	$4a\left(\sqrt{2}\right)^3 + 3b\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2c\left(\sqrt{2}\right) + d = 0$

$$
\left|\begin{array}{ccc}
e & = & 0 \\
c & = & 0 \\
d & = & -1 \\
4a + 2\sqrt{2}b - \sqrt{2} & = & 2\sqrt{2} \\
8\sqrt{2}a + 6b - 1 & = & 0
\end{array}\right|
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc}
e & = & 0 \\
c & = & 0 \\
d & = & -1 \\
4a + 2\sqrt{2}b & = & 3\sqrt{2} \\
8\sqrt{2}a + 6b & = & 1
\end{array}\right|
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc}
e & = & 0 \\
c & = & 0 \\
d & = & -1 \\
4a + 2\sqrt{2}b & = & 3\sqrt{2} \\
2b & = 11 &
\end{array}\right|
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc}
e & = & 0 \\
c & = & 0 \\
d & = & -1 \\
a & = & -2\sqrt{2} \\
b & = \frac{11}{2} &
\end{array}\right|
$$

$$f(x) = -2\sqrt{2}x^4 + \frac{11}{2}x^3 - x$$

6. Aufgabe

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^5 + bx^3 + cx \\
f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 + c \\
f''(x) &= 20ax^3 + 6bx
\end{aligned}
$$

Eigenschaft	Bedingung	Einsetzen
Steigung für x=0 ist 7	$f'(0) = 7$	$5a0^4 + 3b0^2 + c = -7$
A(1;0)	$f(1) = 0$	$a1^5 + b1^3 + c1 = 0$
Wendepunkt P(1;0)	$f''(x) = 0$	$20a1^3 + 6b1 = 0$

$$\left| \begin{array}{rcr} c & = & 7 \\ a+b+7 & = & 0 \\ 20a+6b & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{rcr} c & = & 7 \\ a+b & = & -7 \\ 20a+6b & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{rcr} c & = & 7 \\ a+b & = & -7 \\ 14a & = & 42 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{lcr} e & = & 0 \\ c & = & 7 \\ b & = & -10 \\ a & = & 3 \end{array} \right|$$

$$f\left(x\right) = 3x^5 + -10x^3 + 7x$$

4.3 Funktionenscharen

1. $f_t\left(x\right) = x^3 - 3t^2x$

   - Ansatz $f_t\left(3\right) = 0$

$$\begin{aligned} 3^3 - 3t^23 &= 3 \\ 27 - 9t^2 &= 3 \\ 9t^2 &= 27 \\ t^2 &= 3 \\ t_1 = \sqrt{3} &\vee t_2 = -\sqrt{3} \\ f_t\left(2\right) &= 6,25 \\ 2^3 - 3t^22 &= 6,25 \\ 8 - 6t^2 &= 6,25 \\ 6t^2 &= 1,75 \\ t^2 &= \frac{7}{24} \\ t_1 = \sqrt{\frac{7}{24}} &\vee t_2 = -\sqrt{\frac{7}{24}} \end{aligned}$$

   - Ansatz $f'_t\left(0\right) = -1$

$$\begin{aligned} f'_t\left(x\right) &= 3x^2 - 3t^2 \\ 3 \cdot 0^2 - 3t^2 &= -1 \\ 3t^2 &= 1 \\ t_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} &\vee t_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

- Ansatz: Für die Koordinaten der Extrempunkte gilt: $x_{Extrempunkt} = -y_{Extrempunkt}$

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 3x^2 - 3t^2 \\ f_t''(x) &= 6x \\ \text{Notwendige Bedingung für Extrema: } f_t'(x) = 0 & \\ 3x^2 - 3t^2 = 0 & \\ x^2 = t^2 & \\ x = t & \vee \quad x = -t \\ \text{Hinreichende Bedingung für Extrema: } f_t'(x) = 0 & \wedge \quad f_t''(x) <> 0 \\ f_t'(t) = 0 \wedge f_t''(t) = 6t & \qquad t > 0 \Rightarrow \text{Minimum}; t < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \\ f_t'(-t) = 0 \wedge f_t''(-t) = -6t & \qquad t > 0 \Rightarrow \text{Maximum}; t < 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ f_t(t) &= t^3 - 3t^2 t = -2t^3 \\ f_t(-t) &= (-t)^3 - 3t^2(-t) = 2t^3 \\ \text{Es soll gelten: } x_{Extrempunkt} = -y_{Extrempunkt} & \\ t &= 2t^3 \\ 2t^3 - t &= 0 \\ t\left(2t^2 - 1\right) &= 0 \\ t = 0 & \vee \quad t = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee t = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Für die angebenen Werte für t ist die Bedingung erfüllt, d.h. die Extrempunkte liegen auf der 2. Winkelhalbierenden.

- Ansatz: Für die positive Nullstelle gilt: $f_t'(x_{Nullstelle})$=1

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ x^3 - 3t^2 x &= 0 \\ x\left(x^2 - 3t^2\right) &= 0 \\ x = 0 & \vee \quad x^2 = 3t^2 \\ x = 0 & \vee \quad x = t\sqrt{3} \vee x = -t\sqrt{3} \end{aligned}$$

Für die weiteren Rechnung wird t als positiv angenommen.

$$\begin{aligned} f_t'\left(t\sqrt{3}\right) &= 1 \\ 3\left(t\sqrt{3}\right)^2 - 3t^2 &= 1 \\ 3t^2 3 - 3t^2 &= 1 \\ 9t^2 - 3t^2 &= 1 \\ 6t^2 &= 1 \\ t_1 = \sqrt{\frac{1}{6}} & \vee \quad t_2 = -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Für die angegebenen Werte ist die Bedingung erfüllt, d.h in der Nullstelle $x = t\sqrt{3}$ hat der Graph die Steigung 1

2. $f_t(x) = x^3 + \frac{t}{2}x^2 + (t+1)x$

   - Ansatz: Man setzt zwei Funktionen der Schar gleich und schaut, welche Schnittpunkt unabhängig von den Parametern a und b sind. Laut Aufgabenstellung sollte man 2

Stellen finden. $f_a(x) = f_b(x)$

$$
\begin{aligned}
x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+1)x &= x^3 + \frac{b}{2}x^2 + (b+1)x \\
x^2\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) + x(a+1-b-1) &= 0 \\
x = 0 \vee x\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) + a - b &= 0 \\
x = 0 \vee x\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) &= -a + b \\
x = 0 &\vee x = -2 \\
f_t(0) = 0 & \quad f_t(-2) = -10
\end{aligned}
$$

- Ansatz: Für die gesuchte Stelle x_0 gilt: $f_a'(x_0) = f_b'(x_0)$

$$
\begin{aligned}
f_t'(x) &= 3x^2 + tx + t + 1 \\
3x^2 + ax + a + 1 &= 3x^2 + bx + b + 1 \\
x(a-b) &= -a + b \\
x &= -1 \\
f_t'(-1) &= 3(-1)^2 + t(-1) + t + 1 = 3 - t + t + 1 = 4
\end{aligned}
$$

- Ansatz: $f_t(x) = -x$

$$
\begin{aligned}
x^3 + \frac{t}{2}x^2 + (t+1)x &= -x \\
x^3 + \frac{t}{2}x^2 + tx + 2x &= 0 \\
x = 0 &\vee x^2 + \frac{t}{2}x + t + 2 = 0 \\
x = 0 &\vee x^2 + \frac{t}{2}x = -t - 2 \\
x = 0 &\vee x^2 + \frac{t}{2}x + \frac{t^2}{16} = -t - 2 + \frac{t^2}{16} \\
x = 0 &\vee \left(x + \frac{t}{4}\right)^2 = -t - 2 + \frac{t^2}{16}
\end{aligned}
$$

Es existieren drei Schnittpunkte wenn $-t - 2 + \frac{t^2}{16} > 0$ ist, es gibt zwei Schnittpunke, wenn $-t + \frac{t^2}{16} = 0$ und es gibt einen Schnittpunkte, wenn $-t + \frac{t^2}{16} < 0$ ist.

$$
\begin{aligned}
-t - 2 + \frac{t^2}{16} &= 0 \\
\frac{1}{16}t^2 - t - 2 &= 0 \\
t^2 - 16t - 32 &= 0 \\
t_1 = 8 + \sqrt{64 + 32} &\vee t_2 = 8 - \sqrt{64 + 32} \\
t_1 = 8 + \sqrt{96} &\vee t_2 = 8 - \sqrt{96}
\end{aligned}
$$

Für die Werte $t = 8 + \sqrt{96}$ bzw. $t = 8 - \sqrt{96}$ gibt es zwei Schnittpunkte $x = 0$ und $x = -\frac{t}{4}$.

$$
\begin{aligned}
t^2 - 16t - 32 &= \\
\left(t - \left(8 + \sqrt{96}\right)\right) \cdot \left(t - \left(8 + \sqrt{96}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Wenn dieser Termin positiv ist, gibt es drei Schnittpunkte. Dieser Term ist positiv, wenn die erste Klammer positiv und die zweite Klammer positiv ist oder wenn die erste Klammer negativ und die zweite Klammer negativ ist. Dies gilt für die Werte: $t > 8 + \sqrt{96}$ [Beide Klammer positiv] bzw. $t < 8 - \sqrt{96}$ [Beide Klammern negativ]. Für alle anderen Werte $8 + \sqrt{96} < t < 8 + \sqrt{96}$ ist $t^2 - 16t - 32 < 0$, d.h. es gibt nur einen Schnittpunkt!

- Graph für t=1 und t=-1