# Grundlagen Leistungskurs Mathematik

Roman Deeken, Maik Urban, Julia Zahran

07. September 2011

## Inhaltsverzeichnis

**1 Einleitung** **3**

**2 Ausblick zu Zielen, Bereichen, Themen und Gegenständen** **4**
2.1 Ausgewählte Ziele der gymnasialen Oberstufe . . . . . 4
2.2 Aufgaben und Ziele des Fachs . . . . . 4
2.3 Bereiche . . . . . 4
2.4 Themen und Gegenstände . . . . . 4
2.4.1 Analysis . . . . . 4
2.4.2 Lineare Algebra/Geometrie . . . . . 5
2.4.3 Stochastik . . . . . 6

**3 Leistungsbeurteilung** **6**
3.1 Beurteilungsbereich: Klausuren . . . . . 6
3.2 Beurteilungsbereich: Sonstige Mitarbeit . . . . . 6
3.3 Organisatorisches . . . . . 7

**4 Lösen von Gleichung** **8**
4.1 Quadratische Gleichungen . . . . . 8
4.1.1 Allgemeine Lösungenformel . . . . . 8
4.1.2 p/q-Formel . . . . . 8
4.1.3 Quadratische Ergänzung . . . . . 8
4.1.4 Spezialfall 1: $ax^2+c=0$ . . . . . 8
4.1.5 Spezialfall 2: $ax^2+bx=0$ . . . . . 9
4.1.6 Beispiele . . . . . 9
4.2 Gleichungen höheren Grades . . . . . 10
4.2.1 Biquadratische Gleichungen . . . . . 10
4.2.2 Lösen durch Ausklammern . . . . . 11
4.2.3 Polynomdivision . . . . . 11
4.2.4 Beispiele . . . . . 13

**5 Kurvendiskussion** **14**
5.1 Definitionsbereich . . . . . 14
5.2 Symmetrie . . . . . 14
5.3 Verhalten für betragsgroße x-Werte . . . . . 14
5.4 Nullstellen . . . . . 14
5.5 Ableitungen . . . . . 14
5.6 Extremstellen . . . . . 14
5.7 Wendepunkte . . . . . 15
5.8 Beispiel . . . . . 15

**6 Bestimmung ganzrationaler Funktionen** **18**
6.1 Methodik . . . . . 18
6.2 Beispiel . . . . . 18

**7 Aufgaben** **20**
7.1 Lösen von Gleichungen . . . . . 20
7.2 Kurvendiskussion . . . . . 20
7.3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen . . . . . 20

**8 Lösungen** **21**
8.1 Lösen von Gleichungen . . . . . 21
8.2 Kurvendiskussion . . . . . 24
8.3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen . . . . . 33

# 1 Einleitung

Mit den folgenden Ausführungen möchten wir Ihnen zunächst die Möglichkeit bieten, die Grundlagen der Analysis aus der Jahrgangsstufe 11 für den Leistungskurs zu wiederholen. Diese Grundlagen stellen aus unserer Sicht eine unverzichtbare Voraussetzung für eine erfolgreiche Zusammenarbeit in den kommenden zwei Jahren dar.
Des Weiteren möchten wir Ihnen bereits zu diesem Zeitpunkt die Zielsetzungen und Inhalte des Faches deutlich machen und haben diese deshalb auf der Basis der aktuellen Richtlinien und Lehrpläne sowie den Vorgaben für das Zentralabitur 2013 zusammengestellt.
Auch um Transparenz bei der Leistungsbewertung zu schaffen, haben wir einige Grundsätze in Anlehnung an den Richtlinien und Lehrplänen zusammengestellt.

# 2 Ausblick zu Zielen, Bereichen, Themen und Gegenständen

## 2.1 Ausgewählte Ziele der gymnasialen Oberstufe

1. Verbesserung der Fähigkeit des selbstständigen Lernens und Arbeitens
2. Verbesserung grundlegender Einstellungen und Verhaltensweisen für wissenschaftliches Arbeiten
   - Konzentrationsfähigkeit
   - Geduld und Ausdauer
   - das Aushalten von Frustrationen
   - Zuverlässigkeit

## 2.2 Aufgaben und Ziele des Fachs

Mathematikunterricht soll in der gymnasialen Oberstufe ...

- ... auf Anforderungen im Studium und Berufsleben durch die Vermittlung mathematischer Kompetenzen vorbereiten.
- ... verdeutlichen, wie Mathematik zur Beschreibung und Lösung komplexer Probleme beitragen kann.
- ... sowohl zum selbstständigen Lernen wie auch zu kooperativem Lernen in Gruppen anleiten.

## 2.3 Bereiche

Was im Fach Mathematik im Verlauf der gymnasialen Oberstufe zu lernen ist, lässt sich drei Bereichen zuordnen:
*Bereich 1: Fachliche Inhalte*
Dies bedeutet die Aneignung von Begriffen, Lehrsätzen, Beweisen und Algorithmen. Hier steht also die fachsystematische Bedeutung der Mathematik im Vordergrund.
*Bereich 2: Lernen in Kontexten*
Dies bedeutet die Auseinandersetzung mit Mathematik in realen Kontexten. Hier steht also die reale, konkrete Bedeutung der Mathematik im Vordergrund.
*Bereich 3: Methoden und Formen selbstständigen Arbeitens*
Die bedeutet das Einüben selbstständiger, eigenverantwortlicher Arbeitsschritte (Umgang mit Informationen, Problemlösen, Dokumentation, Präsentation, Diskussion) sowie auch kooperativer Vorgehensweisen. Hier steht also der Kompetenzerwerb von Schlüsselqualifikationen durch die Auseinandersetzung mit Mathematik im Vordergrund.

## 2.4 Themen und Gegenstände

Inhaltliche Schwerpukte für den Leistungskurs

### 2.4.1 Analysis

**Fortführung der Differentialrechnung**

- Bestimmung ganzrationaler Funktionen in Sachzusammenhängen
- Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion)
- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen

- Extremwertprobleme

**Integralrechung**

- Produktsummen, Untersuchungen von Wirkungen (z.B. welche Wirkung hat die Wasserzulaufgeschwindigkeit auf das Wasservolumen einer Talsperre)
- Stammfunktionen, Integrierbarkeit, Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution), bestimmtes Integral, Eigenschaften bestimmter Integrale
- Integralfunktion Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Zusammenhang zwischen Integrierbarkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- Beziehungen zwischen Ableitungs- und Integrationsregeln
- Flächenberechnung durch Integration
- Ein Verfahren zur numerischen Integration
- Uneigentliche Integrale

### 2.4.2 Lineare Algebra/Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme für n¿2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme
- Rechnen mit Vektoren: Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension, Erzeugendensysteme, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
- Normalformen von Ebenengleichungen: Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, Schnittwinkel von Geraden und Ebenen, Abstandsprobleme (Punkt-Ebene)

*Alternative 1:*

- Abbildungsmatrizen, Parallelprojektionen
- Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen
- Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation
- Eigenwertprobleme (Eigenwerte und Eigenvektoren)

*oder Alternative 2:*

- Übergangsmatrizen, stochastische Matrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
- Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation
- Fixvektoren, stationäre Verteilung

### 2.4.3 Stochastik

**Wahrscheinlichkeitsrechnung**

- Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Satz von Bayes
- Erwartungswert und Standardabweichung
- Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung, Formeln von de Moivre-Laplace

**Beurteilende Statistik** *Alternative 1:*

- ein- und zweiseitiger Hypothesentest

*oder Alternative 2:*

- Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

**Verknüpfung der Stochastik mit Analysis oder Linearer Algebra**

- Stetige Zufallsgrößen (Analysis) oder stochastische Matrizen / Markovketten (Lineare Algebra)

# 3 Leistungsbeurteilung

## 3.1 Beurteilungsbereich: Klausuren

Im Verlauf der Oberstufe werden die Aufgaben umfangreicher und komplexer, ihre Anzahl verringert sich. Es werden zudem Aufgabentypen hinzukommen, welche die

- Erläuterung von Vorgehensweisen,
- Beschreibung von Lösungswegen,
- kritische Bewertung von Ergebnissen,
- Darstellung von Orientierungswissen

einfordern.

## 3.2 Beurteilungsbereich: Sonstige Mitarbeit

1. Beiträge zum Unterrichsgespräch Diese stellen die Basis der Leistungsbeurteilung im Bereich Sonstige Mitarbeit dar. Hierbei kann es natürlich nicht ausschließlich um Quantität gehen, sondern die Beiträge müssen auch einem gewissen Anspruch genügen.
2. Besondere Arbeitsformen Hausaufgaben stellen eine unverzichtbare Grundlage für den Mathematikunterricht dar. Sie dienen der Festigung und Sicherung des erarbeiteten Unterrichtsstoffes. Hausaufgaben sind von jeder Schülerin und von jedem Schüler zu erledigen. In der Oberstufe kann man, falls die Aufgabenstellung nicht verstanden wird oder keine Lösungsansätze bekannt sind, dies in schriftlicher Form niederlegen. Das Vortragen der Hausaufgaben zählt ebenfalls zum Bereich der sonstigen Mitarbeit. Kriterien für einen guten Vortrag der Hausarbeit:
    - Verständnis und Erklärung der Aufgabe
    - Sicher geordnetes Wissen über den mathematischen Bereich

- Erkennen und Begründen eines geeigneten Lösungsansatz
- Selbstständiges Denken
- Geeignete Darstellung der Ergebnisse in Sprache und Schrift.

Referate Zu diesem Bewertungsbereich sind Stundenwiederholungen und Berichte zu bestimmten interessanten Fragestellungen die im Rahmen des Unterrichts auftreten zu zählen.

3. Schriftliche Übungen Eine *schriftliche Überprüfung* soll den Wissensstand der Kursgruppe feststellen, wobei die Kontrolle von Mitschülern oder Lehrer übernommen werden kann. Diese wird im Allgemeinen nicht bewertet.
   Die *schriftliche Übung* hingegen wird benotet. Die Aufgabenstellung bezieht sich unmittelbar auf den Unterricht. Die Bearbeitungszeit beträgt in der Regel 30 bis 45 Minuten.

4. Selbstständiges Arbeiten/ Gruppenarbeit/ Mitarbeit in Projekten Gesichtspunkte einer Beurteilung:

   - Beiträge zu einer Arbeit
   - Beiträge anderer aufnehmen und weiterentwickeln
   - Aufgaben wie Gesprächsleitung, Protokollführung, Präsentation der Ergebnisse übernehmen
   - Gruppenarbeit organisieren und durchführen

### 3.3 Organisatorisches

Entschuldigungen sind in der Oberstufe selbstverständlich eine Bringschuld Ihrerseits. Wir gehen davon aus, dass Sie Entschuldigungen selbstständig innerhalb einer Woche nach dem Wiedererscheinen in der Schule bei uns vorlegen.
Zudem ist eine selbstständige Nacharbeit des versäumten Unterrichtsstoffs unabdingbar. Hier stehen wir Ihnen selbstverständlich gerne für Rückfragen zu Verfügung. Es empfiehlt sich, schnell mit einem Mitschüler oder einer Mitschülerin Kontakt aufzunehmen, um sich entsprechend zu informieren.
In der Regel stellt der Kurslehrer im Falle der eigenen Nichtanwesenheit entsprechende Aufgaben zur Verfügung. Wir gehen davon aus, dass Sie diese Aufgaben im Vertretungsplanbüro während der Pausen im Oberstufenbüro abholen und gewissenhaft - im Kursverbund - bearbeiten.
Sie werden im Kursverlauf in unregelmäßigen Abständen dazu aufgefordert, geeignete Themen in Form von Selbstlernaufgaben selbstständig und termingerecht zu erarbeiten. Diese Themen sind dann logischerweise auch relevant für den Unterricht und für Klausuren. Dies erfordert sicherlich ein gutes Zeitmanagement von Ihrer Seite.

# 4 Lösen von Gleichung

Gleichungen zu lösen ist für die Mathematik eine unverzichtbare Methodik, um erfolgreich zu bestehen. Das Lösen von linearen, quadratischen Gleichungen und Gleichungen höheren Grades sollte jeder Schüler fehlerfrei beherschen. Deshalb wird an dieser Stelle nochmals die grundlegende Methodik zur Lösung von Gleichungen erläutert.

## 4.1 Quadratische Gleichungen

Die allgemeine Form von quadratischen Gleichungen lautet $ax^2+bx+c=0$. Für diese allgemeine Form gibt es unterschiedliche Lösungswege.

### 4.1.1 Allgemeine Lösungenformel

Für die Gleichung $ax^2+bx+c=0$ lauten die beiden Lösungen:
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

### 4.1.2 p/q-Formel

Um die p/q-Formel anwenden zu können, muss die allgemeine Gleichung $ax^2+bx+c=0$ erst normiert werden, d.h. die komplette Gleichung muss durch den Faktor a geteilt werden, so entsteht die Gleichung $x^2+px+q=0$ mit den beiden Lösungen:
$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

### 4.1.3 Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung wird die Gleichung schrittweise gelöst.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 \quad &| \quad :a \\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad &| \quad p=\frac{b}{a} \qquad q=\frac{c}{a} \\
x^2+px+q=0 \quad &| \quad -q \\
x^2+px=-q \quad &| \quad \text{Quadratische Ergänzung} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \quad &| \quad \text{Binomische Formel} \\
\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \quad &| \quad \sqrt{\phantom{x}} \\
x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \vee \quad x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad &| -\frac{p}{2} \\
x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \vee \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad &
\end{aligned}$$

### 4.1.4 Spezialfall 1: $ax^2+c=0$

Hier braucht man nicht unbedingt die beiden o.g. Formel, es reicht zuerst das c auf die andere Seite zu bringen und anschließend durch a zu teilen. Dann erhält man die beiden Lösungen:
$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$
$x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

### 4.1.5 Spezialfall 2: ax$^2$+bx=0

Auch hier braucht man ebenfalls nicht unbedingt die allgemeine Lösungsformel oder die p/q-Formel. Es reicht ein x auszuklammern und die beiden entstehen Gleichungen zu lösen. Man verwandelt die Summe durch das Ausklammern in ein Produkt. Für dieses Produkt gilt dann: Ein Produkt ist gleich Null, wenn der erste Faktor oder der zweite Faktor gleich Null ist!

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax+b) &= 0 \\ x = 0 \vee ax + b &= 0 \\ x = 0 \vee x = \frac{-b}{a} & \end{aligned}$$

### 4.1.6 Beispiele

- Allg. Lösungsformel

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 8 &= 0 \\ x_1 = \frac{-4 + \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} &\quad \vee \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} \\ x_1 = \frac{-4 + \sqrt{16 + 64}}{4} &\quad \vee \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{16 + 64}}{4} \\ x_1 = \frac{-4 + \sqrt{80}}{4} &\quad \vee \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{80}}{4} \\ x_1 \approx 1,236 &\quad \vee \quad x_2 \approx -3,236 \\ \mathbb{L} = \{\frac{-4 + \sqrt{80}}{4}; \frac{-4 - \sqrt{80}}{4}\} & \end{aligned}$$

- p/q-Formel

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 8 = 0 &\quad | \quad : 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 & \\ x_1 = \frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} + 4} &\quad \vee \quad \frac{-2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} + 4} \\ x_1 = -1 + \sqrt{5} &\quad \vee \quad x_2 = -1 - \sqrt{5} \\ x_1 \approx 1,236 &\quad \vee \quad x_2 \approx -3,236 \\ \mathbb{L} = \{-1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\} & \end{aligned}$$

- Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 8 = 0 &\quad | \quad : 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 &\quad | \quad +4 \\ x^2 + 2x = 4 &\quad | \quad \text{Quadratische Ergänzung} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 5 &\quad | \quad \text{Binomische Formel} \\ (x+1)^2 = 5 &\quad | \quad \sqrt{} \\ x + 1 = \sqrt{5} \vee x + 1 = -\sqrt{5} &\quad | \quad -1 \\ x_1 = -1 + \sqrt{5} \vee x_2 = -1 - \sqrt{5} & \\ x_1 \approx 1,236 &\quad \vee \quad x_2 \approx -3,236 \\ \mathbb{L} = \{-1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\} & \end{aligned}$$

- Spezialfall 1

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6 &= 0 \quad | \quad +6 \\ 3x^2 &= 6 \quad | \quad :3 \\ x^2 &= 2 \quad | \quad \sqrt{} \\ x_1 = \sqrt{2} \vee x_2 &= -\sqrt{2} \\ x_1 \approx 1,414 \vee x_2 &\approx -1,414 \\ \mathbb{L} &= \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

- Spezialfall 2

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x &= 0 \quad | \quad \text{Ausklammerm von x} \\ x\,(4x - 12) &= 0 \quad | \\ x = 0 \vee 4x - 12 &= 0 \\ x = 0 \vee 4x &= 12 \\ x = 2 \vee x &= 3 \\ \mathbb{L} &= \{0; 3\} \end{aligned}$$

## 4.2 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen mit einem Grad größer als zwei lassen sich z.T. auch mit den oben beschriebenen Verfahren lösen, so beruht das Lösen von biquadratischen Gleichung auf der Methodik des Lösen einer quadratischen Gleichung. Auch die Methodik des Ausklammern kann bei manchen Gleichungen recht schnell zur Lösung führen. Bei vielen Gleichungen muss auch 2 oder mehr Verfahren anwenden, um zur Lösung zu kommen. Folgende Verfahren werden hier nochmals grundlegend erläuter das Lösen von biquadratischen Gleichungen, das Ausklammern und die Polynomdivision.

### 4.2.1 Biquadratische Gleichungen

Biquadratische Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Dazu muss man eine Substitution durchführen. Man erkennt eine biquadratische Gleichung daran, dass der größere Exponent das Doppelte des kleineren Exponenten ist. Mit Hilfe der Potenzgesetze kann man die Substitution durchführen.

$$\begin{aligned} ax^{2n} + bx^n + c &= 0 \quad | \quad \text{Umformungen} \\ a\,(x^n)^2 + bx^n + c &= 0 \quad | \quad \text{Substitution } x^n = z \\ az^2 + bz + c &= 0 \quad | \quad \text{allg. Lösungsformel oder quadratische Ergänzung} \\ z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\quad \vee \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad |\text{Resubstitution } z = x^n \\ x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\quad \vee \quad x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad | \sqrt[n]{} \\ x_1 = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} &\quad \vee \quad x_3 = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_2 = -\sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} &\quad \vee \quad x_4 = -\sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{aligned}$$

Für ein gerades n ergeben sich vier Lösungen, für ein ungerades n nur 2, nämlich die Lösungen $x_1$ und $x_3$.

### 4.2.2 Lösen durch Ausklammern

Durch Ausklammern von erhält man automatisch immer Null als Lösung der Gleichung. Dadurch verringert sich der Grad einer Gleichung sofort. So kann man die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ durch Ausklammern auf eine quadratschische Gleichung zurückführen, oder die Gleichung $ax^5 + bx^3 + cx = 0$ auf eine biquadratische Gleichung.

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx &= 0 \quad | \quad \text{x ausklammern} \\ x\left(ax^2 + bx + c\right) &= 0 \\ x_1 = 0 \vee ax^2 + bx + c &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem zweiten Teil erhält man nun mit den Lösungsmethodiken für quadratische Gleichungen eine zweite und dritte Lösung für x.

$$\begin{aligned} ax^5 + bx^3 + cx &= 0 \quad | \quad \text{x ausklammern} \\ x\left(ax^4 + bx^2 + c\right) &= 0 \\ x_1 = 0 \vee ax^4 + bx^2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem zweiten Teil erhält man nun mit den Lösungsmethodiken für biquadratische Gleichungen mit n=4 ein zweite, dritte, vierte und fünfte Lösung für x.

### 4.2.3 Polynomdivision

Die Polynomdivision ist die Methodik, die man immer anwenden kann, wenn Lösungen existieren. Sie ist aber auch die schwierigste Methodik. Vorweg einige Bemerkungen. Jedes Polynom zerfällt in die sogenannten Linearfaktoren, wenn Nullstellen existieren. Das Ziel der Polynomdivision ist es also eine Nullstelle zu raten oder verschiedene Möglichkeiten auszuprobieren und dann das Polynom in ein Produkt zu erlegen. Man erkennt, dass eine quadratsiche Gleichung maximal 2 Lösungen hat, eine Gleichung dritten Grades höchstens 3 und eine Gleichung vierten Grades 4. Dies nennt man den Fundamentalsatz der Algebra. Der Beweis braucht uns hier nicht näher zu beschäftigen, nur die Konsequenzen. Betrachtet man das Polynom $a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$ so kann man hier keine der bisherigen Methodiken anwenden. Wenn man aber eine Nullstelle $z_1$ hat, dann kann man dieses Polynom auch anders schreiben:
$a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1 = \left(a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2\right)(x - z_1)$
Besitzt ein Polynom vier Nullstellen, $z_1$, $z_2$, $z_3$ und $z_4$ hätte könnte man schreiben:
$a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1 = a_3(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4)$ Aus der ersten Gleichung ergibt sich dann die Polynomdivision:
$\left(a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1\right) : (x - z_1) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$
Nehmen wir mal die Gleichung: $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18 = 0$
1. Schritt: Nullstellen raten
Es kommen nur ganzzahlige Teiler von 18 in Frage. Also +/-1;+/-2;+/-3;+/-6;+/-9;+/-18. Durch Einsetzen der Zahlen in das Polynom sucht man die erste Nullstelle.
$1^4 + 5 * 1^3 + 6 * 1^2 - 6 * 1 - 18 \neq 0$
$(-3)^4 + 5 * (-3)^3 + 6 * (-3)^2 - 6 * (-3) - 18 = 0$
Dann heißt der Linearfaktor zur Nullstelle -3 (x+3). Allgemein: Wenn a eine Nullstelle, eines Polynoms ist, heißt er passende Linearfaktor (x-a).
2. Schritt: Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\right) : \left(x + 3\right) = x^3 + 2x^2 - 6 \\ \underline{-x^4 - 3x^3} \\ \qquad\quad 2x^3 + 6x^2 \\ \qquad\quad \underline{-2x^3 - 6x^2} \\ \qquad\qquad\qquad -6x - 18 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{\quad 6x + 18} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Also kann man Folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18 &= 0 \\ (x^3 + 2x^2 - 6)(x + 3) &= 0 \\ x^3 + 2x^2 - 6 = 0 \quad &\vee \quad x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Die Schritte im Einzelnen:

$$\big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) =$$

Als erstes teilt man $\frac{x^4}{x} = x^3$ im allgemeinen $\frac{ax^4}{x} = ax^3$ und schreibt dies hinter das Gleichheitszeichen.

$$\big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3$$

Anschließend multipliziert man dieses Ergebniss, mit dem Linearfaktor, hier x+3. Es ergibt sich $(x + 3) \cdot x^3 = x^4 + 3x$ . Dieses schreibt man unter die erste Klammer, da man dies aber subtrahieren muss dreht man die Vorzeichen einfach um! Das Ergebnis sollte dann so aussehen:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3 \\ \underline{-\,x^4 - 3x^3} \end{array}$$

Man addiert und holt die nächste Zahl herunter.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3 \\ \underline{-\,x^4 - 3x^3} \\ \qquad\qquad 2x^3 + 6x^2 \end{array}$$

Nun beginnt es wieder von vorne. Man dividiert $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$ und schreibt dieses hinter das Gleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3 + 2x^2 \\ \underline{-\,x^4 - 3x^3} \\ \qquad\qquad 2x^3 + 6x^2 \end{array}$$

Anschließend multipliziert man wieder dieses Ergebniss, mit dem Linearfaktor, hier x+3. Es ergibt sich $(x + 3) \cdot 2x^2 = 2x^3 + 6x$. Dieses schreibt man unter die erste Klammer, da man dies aber subtrahieren muss dreht man die Vorzeichen einfach um! Das Ergebnis sollte dann so aussehen:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3 + 2x^2 \\ \underline{-\,x^4 - 3x^3} \\ \qquad\qquad 2x^3 + 6x^2 \\ \qquad\quad \underline{-\,2x^3 - 6x^2} \end{array}$$

Man addiert und holt die nächsten beiden Zahlen herunter.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3 + 2x^2 \\ \underline{-\,x^4 - 3x^3} \\ \qquad\qquad 2x^3 + 6x^2 \\ \qquad\quad \underline{-\,2x^3 - 6x^2} \\ \qquad\qquad\qquad -\,6x - 18 \end{array}$$

Noch ein Durchlauf und man hat das Ergebnis:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 6x - 18\big) : \big(x + 3\big) = x^3 + 2x^2 - 6 \\ \underline{-\,x^4 - 3x^3} \\ \qquad\qquad 2x^3 + 6x^2 \\ \qquad\quad \underline{-\,2x^3 - 6x^2} \\ \qquad\qquad\qquad -\,6x - 18 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{\quad 6x + 18} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

### 4.2.4 Beispiele

- Biquadratische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad &| \quad \text{Umformen} \\
\left(x^2\right)^2 - 13x^2 + 36 = 0 \quad &| \quad \text{Substitution } x^2 = z \\
z^2 - 13z + 36 = 0 \quad &| \quad \text{p/q-Formel} \\
z_1 = \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{169}{4} - 36} \quad &\vee \quad z_2 = \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{169}{4} - 36} \\
z_1 = 6,5 + \sqrt{6,25} \quad &\vee \quad z_2 = 6 + 5 - \sqrt{6,25} \\
z_1 = 6,5 + 2,5 \quad &\vee \quad z_2 = 6,5 - 2,5 \\
z_1 = 9 \quad &\vee \quad z_2 = 4 | \text{ Resubstitution } z = x^2 \\
x^2 = 9 \quad &\vee \quad x^2 = 4 | \quad \sqrt{} \\
x_1 = 3 \vee x_2 = -3 \quad &\vee \quad x_3 = 2 \vee x_4 = -2 \\
\mathbb{L} = \{-3; -2; 2; 3\}
\end{aligned}
$$

- Gleichung mit Ausklammern

$$
\begin{aligned}
4x^3 - 16x^2 + 16x = 0 \quad &| \quad : 4 \\
x^3 - 4x^2 + 16x = 0 \quad &| \quad \text{Ausklammern} \\
x\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0 \quad & \\
x_1 = 0 \quad &\vee \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad | \text{p/q-Formel} \\
x_1 = 0 \quad &\vee \quad x_2 = 2 + \sqrt{4-4} \vee x_3 = 2 - \sqrt{4-4} \\
x_1 = 0 \quad &\vee \quad x_2 = 2 \vee x_3 = 2 \\
\mathbb{L} = \{0; 2\}
\end{aligned}
$$

- Polynomdivision
  $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$
  mögliche Nullstellen: $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6$
  $1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 1 - 3 - 2 + 6 \neq 0$
  $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 6 = -1 - 3 + 2 + 6 \neq 0$
  $2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 6 = 8 - 12 - 4 + 6 \neq 0$
  $(-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 6 = -8 - 12 + 4 + 6 \neq 0$
  $3^3 - 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 6 = 27 - 27 - 6 + 6 = 0$
  Also ist x=3 eine Nullstelle und (x-3) der dazugehörige Linearfaktor.

$$
\begin{array}{r}
\left(\quad x^3 - 3x^2 - 2x + 6\right) : \left(x - 3\right) = x^2 - 2 \\
\underline{-\,x^3 + 3x^2} \qquad\qquad\qquad \\
-\,2x + 6 \qquad \\
\underline{2x - 6} \qquad \\
0 \qquad
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0 \quad & \\
(x-3) \cdot \left(x^2 - 2\right) \quad & \\
x - 3 = 0 \quad &\vee \quad x^2 - 2 = 0 \\
x_1 = 3 \quad &\vee \quad x^2 = 2 \\
x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = \sqrt{2} \vee x_3 = -\sqrt{2} \\
\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3\}
\end{aligned}
$$

# 5 Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion untersucht eine Funktion auf die wesentlichen Eigenschaften. Nach der Diskussion kann der Graph aufgrund der Eigenschaften skizziert werden. Zu den Eigenschaften gehören: Definitionsbereich, Symmetrie, Verhalten für betragsgroße x-Werte, Nullstellen, Ableitungen, Extremstellen und Wendepunkte.

## 5.1 Definitionsbereich

Für ganzrationale Funktionen der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots a_1 x + a_0$ ist der Definitionsbereich die Menge der reelen Zahlen $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, d.h. man kann jede reelle Zahl für x einsetzen.

## 5.2 Symmetrie

Es gibt zwei Formen der Symmetrie, die Achsensymmetrie zur y-Achse und die Punktsymmetrie zum Ursprung. Gilt $f(-x) = f(x)$, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, gilt $f(-x) = -f(x)$, ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung. Für ganzrationale Funktionen kann man folgendes feststellen: Treten nur gerade Exponenten bei den Potenzen von x auf, so liegt eine Achsensymmetrie zur y-Achse vor. Treten nur ungerade Exponenten bei den Potenzen von x auf, so liegt eine Punktsymmetrie zum Urspung vor. Hierbei ist zu beachten, dass $a_0$ als gerader Exponent zählt.

## 5.3 Verhalten für betragsgroße x-Werte

Das Verhalten für betragsgroße x-Werte oder das Verhalten im Unendlichen einer ganzrationalen Funktion wird ausschließlich von dem Summanden mit dem höchsten Exponenten bestimmt. Man unterscheidet die Fälle für positive und negative $a_n$ sowie für gerade und ungerade Exponenten. Es ergibt sich folgende Tabelle:

Gerader Exponent

| | | |
|---|---|---|
| $a_n > 0$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ |
| $a_n < 0$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ |

Ungerader Exponent

| | | |
|---|---|---|
| $a_n > 0$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ |
| $a_n < 0$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ |

## 5.4 Nullstellen

Die Nullstellen sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse. Mit dem Ansatz $f(x) = 0$ und dem Lösen der Gleichung mittels der entsprechenden Methodiken erhält man die Nullstellen der Funktion (vgl. Kapitel 2).

## 5.5 Ableitungen

Im allgemeinen wird die erste, zweite und dritte Ableitung benötigt. Diese sind nach der Summen-, Faktor- und Potenzregel zu bilden.

| Regel | Potenzregel | Faktorregel | Summeregel |
|---|---|---|---|
| Funktion | $x^n$ | $c \cdot f(x)$ | $f(x) + g(x)$ |
| Ableitung | $n \cdot x^{n-1}$ | $c \cdot f'(x)$ | $f'(x) + g'(x)$ |

## 5.6 Extremstellen

Zur Bestimmung der Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkt) einer Funktion wird als erstes ausgenutzt, dass die erste Ableitung der Funktion (die Steigung) der Extremstelle gleich Null ist. Dieses nennt man die notwendige Bedingung. Der Ansatz lautet also: notwendige Bedingung :

$f'(x) = 0$. Durch Auflösen dieser Gleichung erhält man mögliche Extremstellen. Die Unterscheidung in Tief- und Hochpunkte geschieht entweder über die zweite Ableitung, oder über das Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung.
Hinreichende Bedingung für Extremstellen mit Hilfe der 2. Ableitung:
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ an der Stelle $x_0$ liegt ein Minimum vor
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ an der Stelle $x_0$ liegt ein Maxmimum vor
Durch Einsetzen von $x_0$ in die Funktionsgleichung erhält man die Koordinanten der Hoch- und Tiefpunkte. Es kann vorkommen, dass diese hinreichende Bedingung für die zweite Ableitung auch den Wert Null liefert. Ist dies der Fall muss das Vorzeichenwechselkriterium angewendet werden.
Hinreichnde Bedingung für Extremstellen mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums
Seien beispielsweise $x_1$, $x_2$und $x_3$ drei Nullstellen der ersten Ableitung.

| | $x < x_1$ | $x_1$ | $x_1 < x < x_2$ | $x_2$ | $x_2 < x < x_3$ | $x_3$ | $x_3 < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VZW $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | - |

Für $x_1$ gibt es einen Vorzeichenwechsel von - nach +, d.h. bei $x_1$ liegt ein Minimum vor.
Für $x_2$ gibt es einen Vorzeichenwechsel von + nach -, d.h. bei $x_2$ liegt ein Maximum vor.
Für $x_3$ gibt es keinen Vorzeichenwechsel, d.h. bei $x_3$ liegt eine Sattelstelle vor.
Durch Einsetzen von $x_0$ in die Funktionsgleichung erhält man die Koordinanten der Hoch- und Tiefpunkte bzw. Sattelpunkte.

## 5.7 Wendepunkte

Bei der Bestimmung der Wendestellen und Wendepunkte geht man analog vor. Der Ansatz ist die notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$. Durch das Auflösen dieser Gleichung erhält man mögliche Wendestelle. Ob es wirklich Wendestellen sind, kann man wieder über die hinreichende Bedingung feststellen. In Analogie gibt es auch hier zwei, zum einem die hinreichende Bedingung mit Hilfe der 3. Ableitung und zum anderen die hinreichende Bedingung mit dem Vorzeichenwechselkriterium.
Hinreichende Bedingung für Extremstellen mit Hilfe der 2. Ableitung:
$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ an der Stelle $x_0$ liegt eine Wendestelle vor
Durch Einsetzen von $x_0$ in die Funktionsgleichung erhält man die Koordinanten der Wendepunkte. Es kann vorkommen, dass diese hinreichende Bedingung für die dritte Ableitung auch den Wert Null liefert. Ist dies der Fall muss das Vorzeichenwechselkriterium angewendet werden.
Hinreichnde Bedingung für Wendestellen mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums:
Beispielsweise seien $x_1$, $x_2$und $x_3$ drei Nullstellen der zweiten Ableitung.

| | $x < x_1$ | $x_1$ | $x_1 < x < x_2$ | $x_2$ | $x_2 < x < x_3$ | $x_3$ | $x_3 < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VZW $f''(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | - |

Für $x_1$ gibt es einen Vorzeichenwechsel von - nach +, d.h. bei $x_1$ liegt eine Wendestelle vor.
Für $x_2$ gibt es einen Vorzeichenwechsel von + nach -, d.h. bei $x_2$ liegt eine Wendestelle vor.
Für $x_3$ gibt es keinen Vorzeichenwechsel, d.h. bei $x_3$ liegt keine Wendestelle vor.
Durch Einsetzen von $x_0$ in die Funktionsgleichung erhält man die Koordinanten der Wendepunkte.

## 5.8 Beispiel

$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

- Definitionsbereich
  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

- Symmetrie
  Die Funktion weist sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auf, d.h es liegt keine

Symmetrie vor. Alternativ:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 + 5(-x)^2 \\ &= 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 \neq f(x) \Rightarrow \text{nicht achsensymmetrisch} \\ &= 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 \neq -f(x) \Rightarrow \text{nicht punktsymmetrisch} \end{aligned}$$

- Verhalten für betragsgroße x-Werte
  Der größte Exponent ist gerade und der entsprechende Koeffizient größer als Null $a_4 = 2$ , also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

- Nullstellen

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f(x) &= 0 \\ 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 &= 0 \qquad |x^2 \text{ ausklammern} \\ x^2 \cdot \left(2x^2 + 7x + 5\right) &= 0 \\ x^2 = 0 \quad &\vee \quad 2x^2 + 7x + 5 = 0 \qquad | : 2 \\ x_1 = 0 \quad &\vee \quad x^2 + 3,5x + 2,5 = 0 \qquad | \text{ p/q-Formel} \\ x_1 = 0 \quad &\vee \quad x_2 = -1 \vee x_3 = -2,5 \end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2,5$

- Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 + 21x^2 + 10x \\ f''(x) &= 24x^2 + 42x + 10 \\ f''(x) &= 48x + 42 \end{aligned}$$

- Extremstellen

$$\begin{aligned} \text{notwendige Bedingung: } f'(x) &= 0 \\ 8x^3 + 21x^2 + 10x &= 0 \\ x \cdot \left(8x^2 + 21x + 10\right) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad &\vee \quad 8x^2 + 21x + 10 = 0 \\ x_1 = 0 \quad &\vee \quad x_2 = -0,625 \vee x_3 = -2 \end{aligned}$$

Mögliche Extremstellen: $x_1 = 0, x_2 = -0,625; x_3 = -2$

hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) <> 0$

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 \quad &\wedge \quad f''(0) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Minumumstelle bei } x_1\text{=0} \\ f'(-0,625) = 0 \quad &\wedge \quad f''(-0,625) = -6,875 < 0 \Rightarrow \text{Maximumstelle bei } x_2\text{=-0,625} \\ f'(-2) = 0 \quad &\wedge \quad f''(-2) = 22 > 0 \Rightarrow \text{Minumumstelle bei } x_3\text{=-2} \end{aligned}$$

Somit lauten die Extrempunkte:
Hochpunkt (-0,625;0,55)
Tiefpunkte (0;0) und (-2;-4)

- Wendepunkte

$$\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f''(x) &= 0 \\
24x^2 + 42x + 10 &= 0 \qquad | : 24 \\
x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{12} &= 0 \qquad |\text{p/q-Formel} \\
x_1 = -\frac{7}{8} + \frac{1}{24}\sqrt{201} &\quad \vee \quad x_2 = -\frac{7}{8} - \frac{1}{24}\sqrt{201} \\
x_1 \approx -0,28 &\quad \vee \quad x_2 \approx -1,47
\end{aligned}$$

Mögliche Wendestellen: $x_4 = -\frac{7}{8} + \frac{1}{24}\sqrt{201}; x_5 = -\frac{7}{8} - \frac{1}{24}\sqrt{201}$

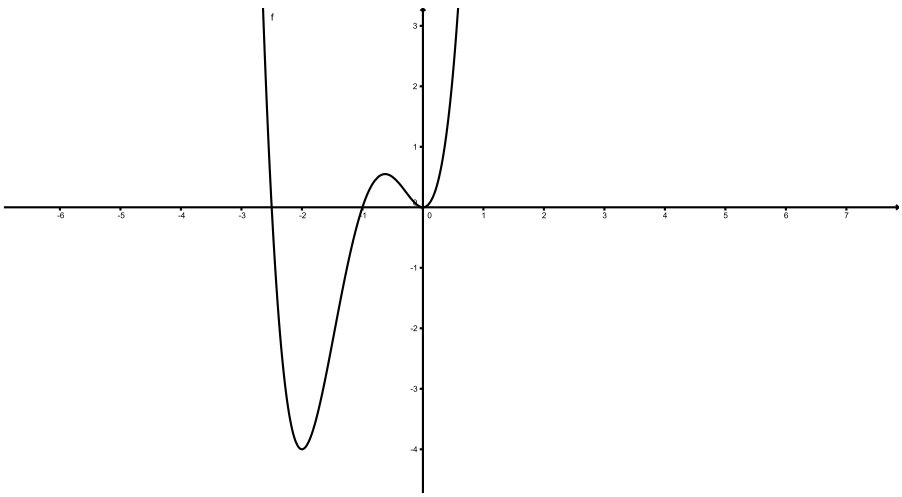
hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f''\left(-\frac{7}{8} + \frac{1}{24}\sqrt{201}\right) = 0 \quad \wedge \quad f'''\left(-\frac{7}{8} + \frac{1}{24}\sqrt{201}\right) \approx 28,56 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_4$$

$$f''\left(-\frac{7}{8} - \frac{1}{24}\sqrt{201}\right) = 0 \quad \wedge \quad f'''\left(-\frac{7}{8} + \frac{1}{24}\sqrt{201}\right) \approx -28,56 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_5$$

Somit lautet die Wendepunkte:
Wendepunkte (-0,28;0,25) und (-1,47;-2,09)

- Graph



# 6 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Ist eine Funktion gegeben, kann man die Koordinaten von Punkten des Graphen ermitteln. Sind umgekehrt Punkte vorgegeben oder Eigenschaften, kann man versuchen, eine ganzrationale Funktion zu bestimmen, deren Graph durch die Punkte geht und die entsprechenenden Eigenschaften ausweist.

## 6.1 Methodik

Als erstes muss man etwas über den Grad der Funktion aussagen. Ist eine Funktion dritten Grades gesucht, lautet die allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Für eine Funktion zweiten Grades benutzt man $f(x) = ax^2 + bx + c$. Als nächstes werden Bedingungen angesetzt, die sich aus der Aufgabenstellung ergeben. Für Koordinaten benutzt man die Funktionsgleichung, für Steigungen die erste Ableitung und für Krümmungen die zweite Ableitung. Diese Ableitungen muss man ggf. noch bilden. Ist eine Funktion achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch kann man sofort alle ungeraden bzw. geraden Exponten streichen. Für eine Funktion dritten Grades braucht man vier Bedingungen, diese Bedingungen ergeben dann ein Gleicungssystem, dass man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen kann. Die Lösungen setzt man zum Schluß in die allgemeine Form ein und kann anschließend das Ergebnis kontrollieren.

## 6.2 Beispiel

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die Winkelhalbierende des ersten Quadranten bei x=1 und ändert sein Krümmungsverhalten im Punkt (0;5).

- Aussagen zum Grad der Funktion
  Es wird angegeben, dass die Funktion vom Grad drei ist, d.h die allegmeine Gleichung lautet:$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man muss also vier Bedingungen aufstellen.
- Bedingungen
  1. Punktkoordinate P(0;0,5)
  2. Wendepunkt P(0;0,5): Es wird angegeben, dass der Graph in P das Krümmungverhalten ändert, d.h. für x=0 liegt ein Wendepunkt vor, d.h die zweite Ableitung ist Null (notwendige Bedingung fr Wendepunkte).
  3. Steigung für x=1 ist 1: Da der Graph die Winkelhalbierende bei x=1 berührt, stimmen die Steigungen des Graph mit der Steigung der Winkelhalbierenden überein. Da die Steigung der Winkelhalbierenden eins ist, ist die Steigung des Graphen und damit die Ableitung auch 1.
  4. Punktkoordinate P(1;1): Diese ist nicht explizit angegeben, aber da der Graph die Winkelhalbierende für x=1 berührt und diese für x=1 den y-Wert 1 hat, muss der Graph auch durch den Punkt (1;1) verlaufen.
- LGS
  Zuerst muss man die allgemeinen Funktion bilden und benötigten Ableitungen bilden, hier die ersten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Nun werden die Eigenschaften in Bedingungen umgesetzt:

| Eingenschaft | Bedingung | Einsetzen |
|---|---|---|
| P(0;0,5) | $f(0) = 0,5$ | $a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0,5$ |
| Wendepunkt P(0;0,5) | $f''(0) = 0$ | $6a0 + 2b = 0$ |
| Steigung bei x=1 ist 1 | $f'(1) = 1$ | $3a1^2 + 2b1 + c = 1$ |
| R (1;1) | $f(1) = 1$ | $a1^3 + b1^2 + c1 + d = 1$ |

Anschließend muss das Gleichungssystem gelöst werden:

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ 2b & = & 0 \\ 3a + 2b + c & = & 1 \\ a + b + c + d & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 3a + 2 \cdot 0 + c & = & 1 \\ a + 0 + c + 0,5 & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 3a + c & = & 1 \\ a + c & = & 0,5 \end{array}\right| \text{IV-III}$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 3a + c & = & 1 \\ -2a & = & -0,5 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 3a + c & = & 1 \\ a & = & 0,25 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 3 \cdot 0,25 + c & = & 1 \\ a & = & 0,25 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 0,75 + c & = & 1 \\ a & = & 0,25 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0,25 \\ a & = & 0,25 \end{array}\right|$$

- Lösung:
  Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = 0,25x^3 + 0,25x + 0,5$

# 7 Aufgaben

## 7.1 Lösen von Gleichungen

Löse die folgenden Gleichungen

1. $-3x^2 + 15x - 12 = 0$
2. $x^4 - x^2 = 0$
3. $x^6 - 2x^4 - 8x^2 = 0$
4. $x^7 + x^5 - 2x^3 = 0$
5. $x^4 + x^2 - 6 = 0$
6. $x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 64x + 80 = 0$
7. $-x^3 - x^2 + x + 1 = 0$
8. $x^4 - 17x^3 + 53x^2 - 7x - 78 = 0$
9. $x^5 + 9x^4 + 13x^3 - 57x^2 - 86x + 120 = 0$

## 7.2 Kurvendiskussion

Führe eine vollständige Kurvendiskussion der folgenden Funktionen durch

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$
2. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$
3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 16$
4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

## 7.3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Bestimme die gesuchten Funktionsgleichungen:

1. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Tiefpunkt P(1;-2), deren Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt.
2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung und im Pukt P(2;4) jeweils ein Extremum.
3. Eine ganzrationale Funktion vom Grad vier hat einen Sattelpunkt im Ursprung und einen Tiefpunkt in P(-2;-6).

# 8 Lösungen

## 8.1 Lösen von Gleichungen

1.

$$\begin{aligned}
-3x^2+15x-12&=0 && \mid\ :-3\\
x^2-5x+4&=0 && \mid\ \text{p/q-Formel}\\
x_1=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-4}&\ \vee && x_1=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}-4}\\
x_1=2,5+\sqrt{2,25}&\ \vee && x_2=2,5-\sqrt{2,25}\\
x_1=4&\ \vee && x_2=1\\
\mathbb{L}=\{1;4\}&
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x^4-x^2&=0 && \mid\ x^2\ \text{ausklammern}\\
x^2\left(x^2-1\right)&=0\\
x^2=0&\ \vee && x^2-1=0\\
x_1=0&\ \vee && x^2=1\\
x_1=0&\ \vee && x_2=1\vee x_3=-1\\
\mathbb{L}=\{-1;0;1\}&
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
x^6-2x^4-8x^2&=0 && \mid\ x^2\ \text{ausklammern}\\
x^2\cdot\left(x^4-2x^2-8\right)&=0\\
x^2=0\vee x^4-2x^2-8&=0 && \mid\ \text{Substitution } x^2=z\\
z=0\vee z^2-2z-8&=0 && \mid\ +8\\
z=0\vee z^2-2z&=8 && \mid\ +1\ \text{Quadratische Ergänzung}\\
z=0\vee z^2-2z+1&=9 && \mid\ \text{Binomische Formel}\\
z=0\vee (z-1)^2&=9 && \mid\ \sqrt{\ }\\
z=0\vee z-1=3\vee z-1&=-3 && \mid\ +1\\
z=0\vee z=4\vee z&=-2 && \mid\ \text{Resubstitution } z=x^2\\
x^2=0\vee x^2=4\vee x^2&=-2 && \mid\ \sqrt{\ }\\
x_1=0\vee x_2=2\vee x_3&=-2\\
\mathbb{L}&=\{-2;0;2\}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
x^7+x^5-2x^3&=0 && \mid\ x^3\ \text{ausklammern}\\
x^3\left(x^4+x^2-2\right)&=0\\
x^3=0\vee x^4+x^2-2&=0 && \mid\ \text{Substitution } x^2=z\\
z_1=0\vee z^2+z-2&=0 && \mid\ \text{p/q-Formel}\\
z_1=0\vee z_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2}\vee z_3&=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+2}\\
z_1=0\vee z_2=-0,5+\sqrt{2,25}\vee z_2&=-0,5-\sqrt{2,25}\\
z_1=0\vee z_2=1\vee z_3&=-2 && \mid\ \text{Resubstitution } z=x^2\\
x_1=0\vee x^2=1\vee x^2&=-2 && \mid\ \sqrt{\ }\\
x_1=0\vee x_2=-1\vee x_3&=1\\
\mathbb{L}&=\{-1;0;1\}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
x^4 + x^2 - 6 = 0 \quad &| \quad \text{Substitution } x^2 = z \\
z^2 + z - 6 = 0 \quad &| \quad \text{p/q-Formel} \\
z_1 = -0,5 + \sqrt{6,25} \vee z_1 = -0,5 - \sqrt{6,25} \quad & \\
z_1 = 2 \vee z_2 = -3 \quad &| \quad \text{Resubstitution } z = x^2 \\
x^2 = 2 \vee x^2 = -3 \quad &| \quad \sqrt{\ } \\
x_1 = \sqrt{2} \vee x_2 = -\sqrt{2} \quad & \\
\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{2}\} \quad &
\end{aligned}$$

6.

$$x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 64x + 80 = 0 \quad | \quad \text{Da f(4)=0 Polynomdivion: } (x-4)$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 64x + 80\big) : \big(x - 4\big) = x^3 - 21x - 20 \\
\underline{-x^4 + 4x^3} \\
\qquad\qquad -21x^2 + 64x \\
\qquad\qquad \underline{21x^2 - 84x} \\
\qquad\qquad\qquad -20x + 80 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{20x - 80} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(x-4) \cdot \big(x^3 - 21x - 20 = 0\big) = 0 \quad & \\
x_1 = 4 \vee x^3 - 21x - 20 = 0 \quad &| \quad \text{Da f(-4)=0 Polynomdivision: } (x+4)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \qquad - 21x - 20\big) : \big(x + 4\big) = x^2 - 4x - 5 \\
\underline{-x^3 - 4x^2} \\
\qquad -4x^2 - 21x \\
\qquad \underline{4x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad -5x - 20 \\
\qquad\qquad \underline{5x + 20} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_1 = 4 \vee (x+4) \cdot \big(x^2 - 4x - 5\big) = 0 \quad & \\
x_1 = 4 \vee x_2 = -4 \vee x^2 - 4x - 5 = 0 \quad &| \quad \text{p/q-Formel} \\
x_1 = 4 \vee x_2 = -4 \vee x_3 = 2 + \sqrt{9} \vee x_4 = 2 - \sqrt{9} \quad & \\
x_1 = 4 \vee x_2 = -4 \vee x_3 = 5 \vee x_4 = -1 \quad & \\
\mathbb{L} = \{-4; -1,4; 5\} \quad &
\end{aligned}$$

7.

$$-x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \quad | \quad \text{Da f(-1)=0 Polynomdivision: } (x+1)$$

$$\begin{array}{l}
\big(-x^3 - x^2 + x + 1\big) : \big(x + 1\big) = -x^2 + 1 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\qquad\qquad x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(x+1)\cdot\left(-x^2+1\right) &= 0 \\
x_1 = -1 \vee -x^2+1 &= 0 \quad | \quad +x^2 \\
x_1 = -1 \vee x^2 &= 1 \quad | \quad \surd \\
x_1 = -1 \vee x_2 = 1 \vee x_3 &= -1 \\
\mathbb{L} &= \{-1;1\}
\end{aligned}
$$

8.

$$x^4 - 17x^3 + 53x^2 - 7x - 78 = 0 \quad | \quad \text{Da f(2)=0 Polynomdivion: } (x-2)$$

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^4 - 17x^3 + 53x^2 \quad - 7x - 78\right) : \left(x-2\right) = x^3 - 15x^2 + 23x + 39 \\
\underline{-x^4 \quad + 2x^3} \\
\qquad\quad -15x^3 + 53x^2 \\
\qquad\quad \underline{15x^3 - 30x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 23x^2 \quad - 7x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-23x^2 + 46x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 39x - 78 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-39x + 78} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(x-2)\cdot\left(x^3 - 15x^2 + 23x + 39 = 0\right) &= 0 \\
x_1 = 2 \vee x^3 - 21x - 20 &= 0 \quad | \quad \text{Da f(3)=0 Polynomdivision: } (x-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 15x^2 + 23x + 39\right) : \left(x-3\right) = x^2 - 12x - 13 \\
\underline{-x^3 \quad + 3x^2} \\
\qquad\quad -12x^2 + 23x \\
\qquad\quad \underline{12x^2 - 36x} \\
\qquad\qquad\qquad -13x + 39 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{13x - 39} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 = 2 \vee (x-3)\cdot\left(x^2 - 4x - 5\right) &= 0 \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 3 \vee x^2 - 12x - 13 &= 0 \quad | \quad \text{p/q-Formel} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = 6 + \sqrt{49} \vee x_4 &= 6 - \sqrt{49} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = 13 \vee x_4 &= -1 \\
\mathbb{L} &= \{-1; 2, 3; 13\}
\end{aligned}
$$

9. $x^5 + 9x^4 + 13x^3 - 57x^2 - 86x + 120 = 0$

$$x^5 + 9x^4 + 13x^3 - 57x^2 - 86x + 120 = 0 \quad | \quad \text{Da f(1)=0 Polynomdivion: } (x-1)$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^5 + 9x^4 + 13x^3 - 57x^2 - 86x + 120\big) : \big(x-1\big) = x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 34x - 120 \\
\underline{-x^5 + x^4} \\
\qquad 10x^4 + 13x^3 \\
\qquad \underline{-10x^4 + 10x^3} \\
\qquad\qquad 23x^3 - 57x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-23x^3 + 23x^2} \\
\qquad\qquad\qquad -34x^2 - 86x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{34x^2 - 34x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -120x + 120 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{120x - 120} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(x-1)\cdot\big(x^3 - 15x^2 + 23x + 39 = 0\big) &= 0 \\
x_1 = 1 \vee x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 34x - 120 = 0 \quad &| \quad \text{Da f(2)=0 Polynomdivision: } (x-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 34x - 120\big) : \big(x-2\big) = x^3 + 12x^2 + 47x + 60 \\
\underline{-x^4 + 2x^3} \\
\qquad 12x^3 + 23x^2 \\
\qquad \underline{-12x^3 + 24x^2} \\
\qquad\qquad 47x^2 - 34x \\
\qquad\qquad \underline{-47x^2 + 94x} \\
\qquad\qquad\qquad 60x - 120 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-60x + 120} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 = 2 \vee (x-2)\cdot\big(x^2 - 4x - 5\big) &= 0 \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee x^3 + 12x^2 + 47x + 60 = 0 \quad &| \quad \text{Da f(-3)=0 Polynomdivision: } (x+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 12x^2 + 47x + 60\big) : \big(x+3\big) = x^2 + 9x + 20 \\
\underline{-x^3 - 3x^2} \\
\qquad 9x^2 + 47x \\
\qquad \underline{-9x^2 - 27x} \\
\qquad\qquad 20x + 60 \\
\qquad\qquad \underline{-20x - 60} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee (x+3)\cdot\big(x^2 - 4x - 5\big) &= 0 \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -3 \vee x^2 + 9x + 20 = 0 \quad &| \quad \text{p/q-Formel} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -3 \vee x_4 = -4,5 + \sqrt{0,25} \vee x_4 = -4,5 - \sqrt{0,25} & \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -3 \vee x_4 = -4 \vee x_5 = -5 & \\
\mathbb{L} = \{-5; -4, -3; 1; 2\} &
\end{aligned}
$$

## 8.2 Kurvendiskussion

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

   - Definitionsbereich
     $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

- Symmetrie
  Die ganzrationale Funktion weist sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auf, d.h es liegt keine Symmetrie vor. Alternativ:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + 5(-x)^2 + 3(-x) - 9 \\ &= -x^3 + 5x^2 - 3x - 9 \neq f(x) \Rightarrow \text{nicht achsensymmetrisch} \\ &= -x^3 + 5x^2 - 3x - 9 \neq -f(x) \Rightarrow \text{nicht punktsymmetrisch} \end{aligned}$$

- Verhalten für betragsgroße x-Werte
  Der größte Exponent ist ungerade und der entsprechende Koeffizient größer als Null, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Nullstellen

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f(x) &= 0 \\ x^3 + 5x^2 + 3x - 9 &= 0 \qquad |\text{Da f(1)=0 Polynomdivision } (x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 5x^2 + 3x - 9\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + 6x + 9 \\ \underline{-x^3 \quad + x^2} \\ \qquad\quad 6x^2 + 3x \\ \qquad \underline{-6x^2 + 6x} \\ \qquad\qquad\quad 9x - 9 \\ \qquad\qquad \underline{-9x + 9} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x-1)\cdot\big(x^2 + 6x + 9 = 0\big) &= 0 \\ (x-1) = 0 \quad &\vee \quad x^2 + 6x + 9 = 0 \qquad |\text{Binomische Formel} \\ x_1 = 1 \quad &\vee \quad (x+3)^2 = 0 \qquad |\sqrt{\ } \\ x_1 = 1 \quad &\vee \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

  Die Nullstellen lauten: $x_1 = 1, x_2 = -3$

- Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 10x + 3 \\ f''(x) &= 6x + 10 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

- Extremstellen

$$
\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f'(x) &= 0 \\
3x^2 + 10x + 3 &= 0 \qquad | : 3 \\
x^2 + \frac{10}{3}x + 1 &= 0 \qquad |\text{p/q-Formel} \\
x_1 = -\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - 1} \quad &\vee \quad x_2 = -\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{25}{9} - 1} \\
x_1 = -\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{16}{9}} \quad &\vee \quad x_2 = -\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{16}{9}} \\
x_1 = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \quad &\vee \quad x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3} \\
x_1 = -\frac{1}{3} \quad &\vee \quad x_2 = -3
\end{aligned}
$$

mögliche Extremstellen:$x_1 = -3; x_2 = -\frac{1}{3}$

$$
\begin{aligned}
\text{hinreichende Bedingung:} \qquad & f'(x) = 0 \wedge f''(x) <> 0 \\
f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \quad \wedge \quad & f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 8 < 0 \Rightarrow \text{Minimumstelle bei } \mathrm{x}_1 \\
f'(-3) = 0 \quad \wedge \quad & f''(-3) = -8 > 0 \Rightarrow \text{Maximumstelle bei } \mathrm{x}_2
\end{aligned}
$$

Hochpunkt (-3;0)
Tiefpunkt ($\frac{1}{3}$;-9,3)

- Wendepunkte

$$
\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f''(x) &= 0 \\
6x + 10 &= 0 \qquad | -10 : 6 \\
x = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Mögliche Wendestellen: $x = \frac{5}{3}$

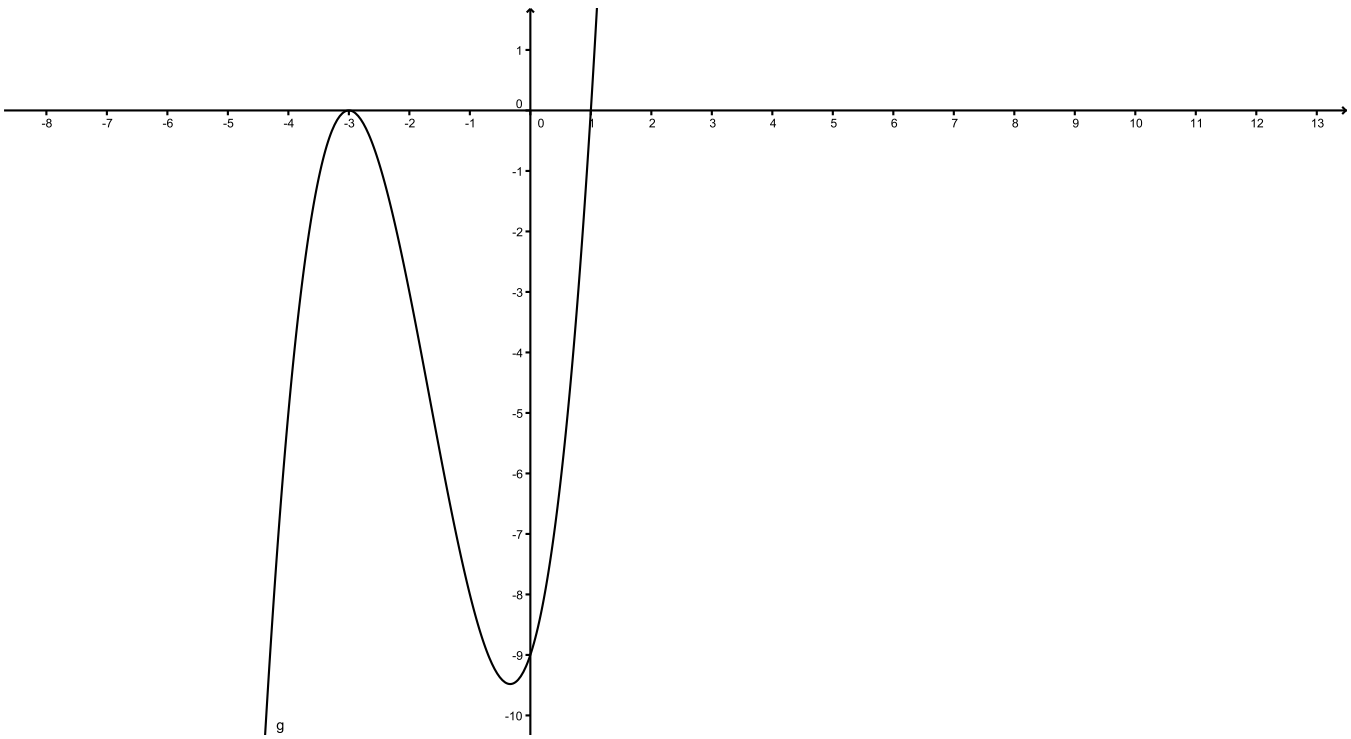
$$
\begin{aligned}
\text{hinreichende Bedingung: } & f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0 \\
f''\left(\frac{5}{3}\right) = 0 \wedge f'''\left(\frac{5}{3}\right) = 6 \neq 0 \Rightarrow & \text{Wendestelle}
\end{aligned}
$$

Somit lautet der Wendepunkt $(\frac{5}{3}; 14,51)$

- Graph

2. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

- Definitionsbereich
  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Symmetrie
  Die ganzrationale Funktion weist sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auf,




d.h es liegt keine Symmetrie vor. Alternativ:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 5(-x)^3 + 6(-x)^2 + 4(-x) - 8 \\ &= x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 \neq f(x) \Rightarrow \text{nicht achsensymmetrisch} \\ &= x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 \neq -f(x) \Rightarrow \text{nicht punktsymmetrisch} \end{aligned}$$

- Verhalten für betragsgroße x-Werte
  Der größte Exponent ist gerade und der entsprechende Koeffizient größer als Null, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

- Nullstellen

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f(x) &= 0 \\ x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 &= 0 \qquad |\text{Da f(2)=0 Polynomdivision } (x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8\big) : \big(x-2\big) = x^3 - 3x^2 + 4 \\ \underline{-x^4 + 2x^3} \\ \qquad -3x^3 + 6x^2 \\ \qquad \underline{3x^3 - 6x^2} \\ \qquad\qquad 4x - 8 \\ \qquad\qquad \underline{-4x + 8} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$(x-2)\cdot\big(x^3 - 3x^2 + 4 = 0\big) = 0$$
$$(x-2) = 0 \quad \vee \quad x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \qquad |\text{Da f(-1)=0 Polynomdivision } (x+1)$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 \qquad\quad + 4\big) : \big(x+1\big) = x^2 - 4x + 4 \\
\underline{-x^3 \quad - x^2} \\
\qquad\quad -4x^2 \\
\qquad\quad \underline{4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad\qquad 4x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 = 2 \vee (x+1) = 0 \quad &\vee \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \mid \text{p/q-Formel} \\
x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -1 \vee x_3 = 2 \vee x_4 = 2
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen lauten: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 2$

- Ableitungen

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 \\
f''(x) &= 12x^2 - 30x + 12 \\
f'''(x) &= 24x - 30
\end{aligned}
$$

- Extremstellen

$$
\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f'(x) &= 0 \\
4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 &= 0 \qquad \text{|Da f'(2)=0 Polynomdivision } (x-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4\big) : \big(x-2\big) = 4x^2 - 7x - 2 \\
\underline{-4x^3 \quad + 8x^2} \\
\qquad\quad -7x^2 + 12x \\
\qquad\quad \underline{7x^2 - 14x} \\
\qquad\qquad\qquad -2x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(x-2) = 0 \quad &\vee \quad 4x^2 - 7x - 2 = 0 \qquad \mid : 4 \\
x_1 = 2 \quad &\vee \quad x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{|p/q-Formel} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{7}{8} + \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{2}} \quad &\vee \quad x_3 = \frac{7}{8} - \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{2}} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{7}{8} + \sqrt{\frac{81}{64}} \quad &\vee \quad x_3 = \frac{7}{8} - \sqrt{\frac{81}{64}} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{7}{8} + \frac{9}{8} \quad &\vee \quad x_3 = \frac{7}{8} - \frac{9}{8} \\
x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \quad &\vee \quad x_3 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

mögliche Extremstellen:$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{4}$

$$\text{hinreichende Bedingung:} \qquad f'(x) = 0 \wedge f''(x) <> 0$$
$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \quad \wedge \quad f''\left(-\frac{1}{4}\right) = 7,5 > 0 \Rightarrow \text{Minimumstelle}$$
$$f'(2) = 0 \quad \wedge \quad f''(2) = 0 \Rightarrow \text{Keine Aussage möglich}$$

Hinreichende Bedingung mit dem Vorzeichenwechselkriterium:

| | $x < 2$ | $x = 2$ | $2 < x$ |
|---|---|---|---|
| VZW $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |

Für $x = 2$ gibt es keinen Vorzeichenwechsel, d.h. bei $x = 2$ liegt ein Sattelstelle vor.
Sattelpunkt (2;0) Tiefpunkt ($\frac{1}{4}$;-8,4)

- Wendepunkte

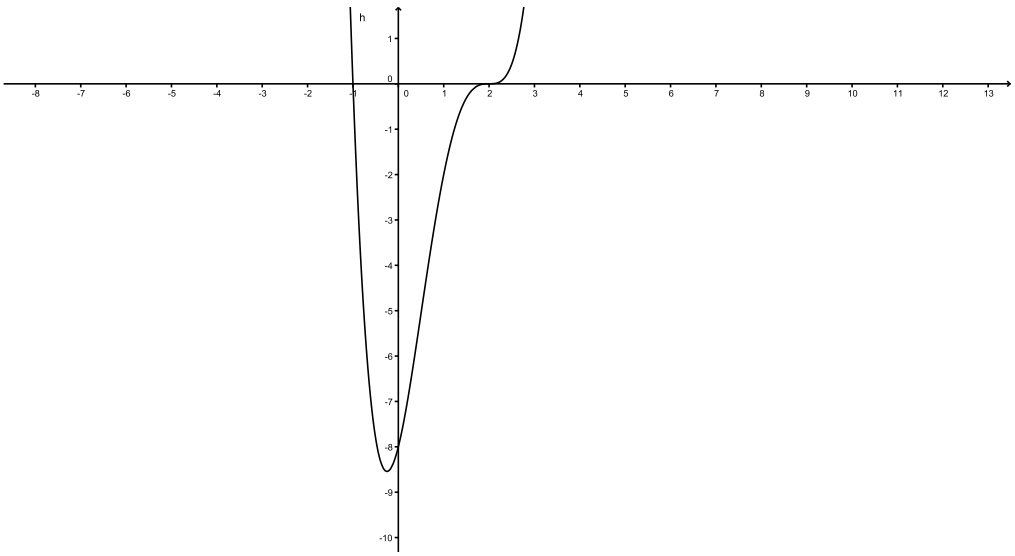
$$\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f''(x) &= 0 \\
12x^2 - 30x + 12 &= 0 \qquad | : 12 \\
x^2 - 2,5x + 1 &= 0 \qquad | \text{ p/q-Formel} \\
x_1 = 1,25 + \sqrt{1,25^2 - 1} \quad &\vee \quad x_2 = 1,25 - \sqrt{1,25^2 - 1} \\
x_1 = 1,25 + 0,75 \quad &\vee \quad x_2 = 1,25 - 0,75 \\
x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = 0,5
\end{aligned}$$

Mögliche Wendestellen: $x_1 = 2, x = 0,5$

$$\text{hinreichende Bedingung: } f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$
$$f''(0,5) = 0 \wedge f'''(0,5) = -18 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle}$$
$$f''(2) = 0 \wedge f'''(2) = 18 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle}$$

Somit lautet die Wendepunkte (2;0) und (0,5;5)

- Graph




3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 16$

- Definitionsbereich
  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Symmetrie
  Die ganzrationale Funktion weist sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auf, d.h es liegt keine Symmetrie vor. Alternativ:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + 2\,(-x)^2 - 16 \\ &= x^3 + 2x^2 - 16 \neq f(x) \Rightarrow \text{nicht achsensymmetrisch} \\ &= x^3 + 2x^2 - 16 \neq -f(x) \Rightarrow \text{nicht punktsymmetrisch} \end{aligned}$$

- Verhalten für betragsgroße x-Werte
  Der größte Exponent ist ungerade und der entsprechende Koeffizient größer als Null, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Nullstellen

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f(x) &= 0 \\ x^3 + 2x^2 - 16 &= 0 \qquad |\text{Da f(2)=0 Polynomdivision } (x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 2x^2 \qquad\quad - 16\big) : \big(x-2\big) = x^2 + 4x + 8 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 \\ \qquad \underline{-\,4x^2 + 8x} \\ \qquad\qquad 8x - 16 \\ \qquad\qquad \underline{-\,8x + 16} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x-2)\cdot\big(x^2 + 4x + 8 = 0\big) &= 0 \\ (x-2) = 0 \vee x^2 + 4x + 8 &= 0 \qquad |\text{ p/q-Formel} \\ x_1 = 2 \vee x_2 = -2 + \underbrace{\sqrt{4-8}}_{\text{nicht definiert}} \quad &\vee \quad x_3 = -2 - \underbrace{\sqrt{4-8}}_{\text{nicht definiert}} \end{aligned}$$

  Die Nullstellen lauten: $x_1 = 2$
- Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x \\ f''(x) &= 6x + 4 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

- Extremstellen

$$\begin{aligned} \text{notwendige Bedingung: } f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 4x &= 0 \qquad |\text{ ausklammern} \\ (x)\cdot(3x+4) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad &\vee \quad 3x + 4 = 0 \qquad |-4 \qquad :3 \\ x_1 = 0 \quad &\vee \quad x_2 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

mögliche Extremstellen:$x_1 = 0; x_2 = -\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \text{hinreichende Bedingung:} \quad & f'(x) = 0 \wedge f''(x) <> 0 \\ f'\left(-\frac{4}{3}\right) = 0 \quad \wedge \quad & f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -4 > 0 \Rightarrow \text{Maximumstelle} \\ f'(0) = 0 \quad \wedge \quad & f''(0) = 4 \Rightarrow \text{Minimumstelle} \end{aligned}$$

Hochpunkt ($-\frac{4}{3}$;-6,5 ) Tiefpunkt (0;-16)

- Wendepunkte

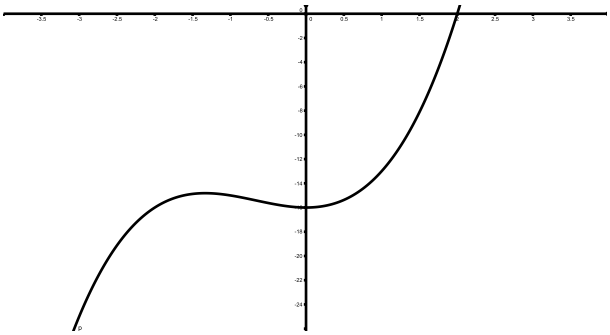
$$\begin{aligned} \text{notwendige Bedingung: } f''(x) &= 0 \\ 6x + 4 &= 0 \qquad | -4 \qquad : 6 \\ x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Mögliche Wendestellen: $x = -\frac{2}{3}$

$$\text{hinreichende Bedingung: } f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$
$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \wedge f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle}$$

Somit lautet der Wendepunkt $(-\frac{2}{3}; -15,1)$

- Graph



4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

- Definitionsbereich
  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Symmetrie
  Die ganzrationale Funktion weist nur gerade Exponenten auf, d.h es liegt eine Achsensymmetrie vor. Alternativ:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow \text{achsensymmetrisch} \end{aligned}$$

- Verhalten für betragsgroße x-Werte
  Der größte Exponent ist gerade und der entsprechende Koeffizient größer als Null, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

- Nullstellen

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz: } f(x) &= 0 \\
x^4 - 2x^2 + 1 &= 0 \quad | \text{ Substitution} x^2 = z \\
z^2 - 2z + 1 &= 0 \quad | \text{ p/q-Formel} \\
z_1 = 1 + \sqrt{1-1} &\vee \quad z_2 = 1 - \sqrt{1-1} \\
z_1 = 1 &\vee \quad z_2 = 1 \quad | \text{ Resubstitution} z = x^2 \\
x^2 &= 1 \quad |\sqrt{} \\
x_1 = 1 &\vee x_2 = -1
\end{aligned}$$

  Die Nullstellen lauten: $x_1 = 1, x_2 = -1$

- Ableitungen

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 4x \\
f''(x) &= 12x^2 - 4 \\
f'''(x) &= 24x
\end{aligned}$$

- Extremstellen

$$\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f'(x) &= 0 \\
4x^3 - 4x &= 0 \quad | \text{ ausklammern} \\
(x) \cdot \left(4x^2 - 4\right) &= 0 \\
x_1 = 0 &\vee \quad 4x^2 - 4 = 0 \quad | + 4 \quad : 4 \\
x_1 = 0 &\vee \quad x^2 = 1 \quad |\sqrt{} \\
x_1 = 0 &\vee \quad x_2 = 1 \vee x_3 = -1
\end{aligned}$$

  mögliche Extremstellen:$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1$

$$\begin{aligned}
\text{hinreichende Bedingung:} \quad & f'(x) = 0 \wedge f''(x) <> 0 \\
f'(-1) = 0 \quad &\wedge \quad f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow \text{Minimumstelle} \\
f'(0) = 0 \quad &\wedge \quad f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Maximumstelle} \\
f'(1) = 0 \quad &\wedge \quad f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \text{Minimumstelle}
\end{aligned}$$

  Hochpunkt (0;1 ) Tiefpunkte (-1;0) (1;0)

- Wendepunkte

$$\begin{aligned}
\text{notwendige Bedingung: } f''(x) &= 0 \\
12x^2 - 4 &= 0 \quad | + 4 \quad : 12 \\
x^2 &= -\frac{1}{3} \quad |\sqrt{} \\
x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} &\vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Mögliche Wendestellen: $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}; x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

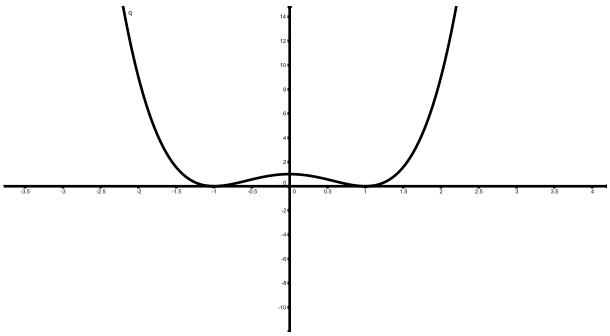
$$\text{hinreichende Bedingung: } f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0 \wedge f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -24\sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0 \wedge f'''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 24\sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle}$$

Somit lautet der Wendepunkt $(\sqrt{\frac{1}{3}}; 0,44)$

- Graph



## 8.3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

1. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Tiefpunkt P(1;-2), deren Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt.

   - Aussagen zum Grad der Funktion
     Es wird angegeben, dass die Funktion vom Grad drei ist, d.h die allegemeine Gleichung lautet:$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man muss also vier Bedingungen aufstellen.
   - Bedingungen
     (a) Punktkoordinate P(1;-2)
     (b) Wendepunkt für x=0
     (c) Tiefpunkt für x=1
     (d) Punktkoordinate R(0;0)
   - LGS

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Nun werden die Eigenschaften in Bedingungen umgesetzt:

| Eingenschaft | Bedingung | Einsetzen |
|---|---|---|
| P(1;-2) | $f(1) = -2$ | $a1^3 + b1^2 + c \cdot 1 + d = -2$ |
| Wendepunkt für x=0 | $f''(0) = 0$ | $6a0 + 2b = 0$ |
| Tiefpunkt für x=1 | $f'(1) = 0$ | $3a1^2 + 2b1 + c = 0$ |
| R (0;0) | $f(0) = 0$ | $a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0$ |

$$\left|\begin{array}{rcr} a+b+c+d & = & -2 \\ 2b & = & 0 \\ 3a+2b+c & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcr} d & = & 0 \\ b & = & 0 \\ 3a+2\cdot 0+c & = & 0 \\ a+0+c+0 & = & -2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcr} d & = & 0 \\ b & = & 0 \\ 3a+c & = & 0 \\ a+c & = & -2 \end{array}\right| \text{IV-III}$$

$$\left|\begin{array}{rcr} d & = & 0,5 \\ b & = & 0 \\ 3a+c & = & 1 \\ -2a & = & -2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcr} d & = & 0 \\ b & = & 0 \\ 3a+c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcr} d & = & 0 \\ b & = & 0 \\ 3\cdot 1+c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcr} d & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & -3 \\ a & = & 0,25 \end{array}\right|$$

- Lösung:
  Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = x^3 - 3x$

2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung und im Punkt P(2;4) jeweils ein Extremum.

   - Aussagen zum Grad der Funktion
     Es wird angegeben, dass die Funktion vom Grad drei ist, d.h die allgemeine Gleichung lautet:$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   - Bedingungen
     (a) Punktkoordinate P(2;4)
     (b) Wendepunkt P(0;0)
     (c) Extremum für x= 2
     (d) Extremum für x= 0
   - LGS

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

| Eingenschaft | Bedingung | Einsetzen |
|---|---|---|
| P(2;4) | $f(2) = 4$ | $a2^3 + b2^2 + c2 + d = 4$ |
| P(0;0) | $f(0) = 0$ | $a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0$ |
| Extremum für x=2 | $f'(2) = 0$ | $3a2^2 + 2b2 + c = 0$ |
| Extremum für x=0 | $f'(0) = 0$ | $3a0^2 + 2b0 + c = 0$ |

$$\left|\begin{array}{ccc} 8a + 4b + 2c + d & = & 4 \\ d & = & 0 \\ 12a + 4b + c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 8a + 4b & = & 4 \\ d & = & 0 \\ 12a + 4b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right| \text{III-I}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 8a + 4b & = & 4 \\ d & = & 0 \\ 4a & = & -4 \\ c & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} -8 + 4b & = & 4 \\ d & = & 0 \\ a & = & -1 \\ c & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} b & = & 3 \\ d & = & 0 \\ a & = & -1 \\ c & = & 0 \end{array}\right|$$

- Lösung:
  Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -x^3 + 3x$

3. Eine ganzrationale Funktion vom Grad vier hat einen Sattelpunkt im Ursprung und einen Tiefpunkt in P(-2;-6)

   - Aussagen zum Grad der Funktion
     Es wird angegeben, dass die Funktion vom Grad vier ist, d.h die allegemeine Gleichung lautet:$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
   - Bedingungen
     (a) Punktkoordinate P(-2;-6)
     (b) Punktkoordinate P(0;0)
     (c) Sattelstelle für x= 0
     (d) Wendestelle für x= 0
     (e) Extremum für x=-2
   - LGS

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

| Eingenschaft | Bedingung | Einsetzen |
|---|---|---|
| P(-2;-6) | $f(-2) = -6$ | $a(-2)^4 + b(-2)^3 + c(-2)^2 + d(-2) + e = -6$ |
| P(0;0) | $f(0) = 0$ | $a0^4 + b0^3 + c0^2 + d0 + e = 0$ |
| Extremum für x=0 | $f'(0) = 0$ | $4a0^3 + 3b0^2 + 2c0 + d = 0$ |
| Wendestelle für x=0 | $f''(0) = 0$ | $12a0^2 + 6b0 + 2c = 0$ |
| Extremum für x=-2 | $f'(0) = 0$ | $4a(-2)^3 + 3b(-2)^2 + 2c(-2) + d = 0$ |

$$\left|\begin{array}{rcl} 16a - 8b + 4c - 2d + e & = & -6 \\ e & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ -32a + 12b - 4c + d & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} 16a - 8b & = & -6 \\ e & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ -32a + 12b & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{2I+V} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcl} -4b & = & -6 \\ e & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ -32a + 12b & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} b & = & \frac{3}{2} \\ e & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ -32a + 12 \cdot \frac{3}{2} & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcl} b & = & \frac{3}{2} \\ e & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a & = & \frac{9}{16} \end{array}\right|$$

- Lösung:
  Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3$