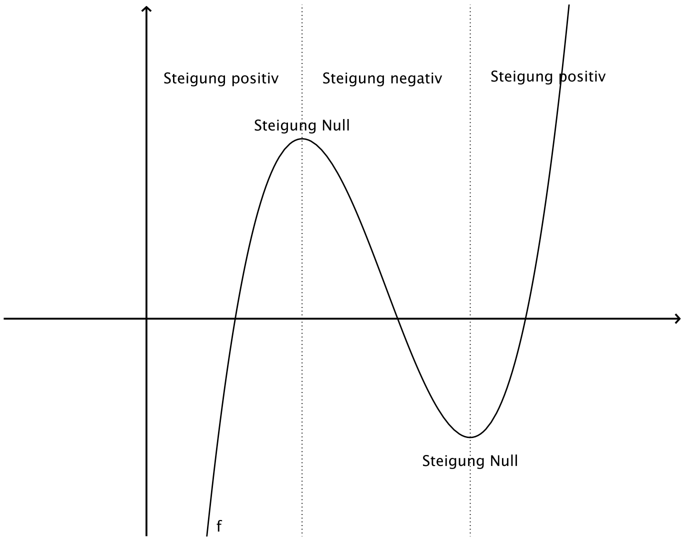
Bestimmung von Extrempunkten einer Funktion

Die nebenstehende Abbildung zeigt, wie sich die Steigung des Graphen in den markierten Abschnitten verhält. Die Lage der Extrempunkte gibt dabei einen Hinweis, welche Abschnitte betrachtet werden müssen.

Man muss sich nun an folgenden Zusammenhang erinnern:

Die Steigung einer Funktion f in einem Punkt kann mit Hilfe der ersten Ableitung f' berechnet werden.



Möchte man von einer gegeben Funktion f die Extrempunkte bestimmen (sie sind also noch unbekannt), so nutzen wir folgende Kriterien aus:

1. An der Stelle des Extrempunkts muss $f'(x) = 0$ gelten (notwendiges Kriterium).

2. In der Umgebung des Extrempunkts muss ein Vorzeichenwechsel von f' vorliegen (hinreichendes Kriterium).

Vergleiche die Kriterien mit der obigen Abbildung!

Beispiel:

Wir wollen die Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ bestimmen.

<u>1. notwendiges Kriterium:</u>

a) Bestimme zuerst f': $f'(x) = 2x - 4$

b) Berechne die x, für die $f'(x) = 0$ gilt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

An der Stelle $x = 2$ liegt also ein *möglicher Extrempunkt* vor.

<u>2. hinreichendes Kriterium:</u>

a) Berechne den Wert der ersten Ableitung *kurz vor der Extremstelle*:

Wähle z. B. $x = 1{,}5$, dann ist $f'(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5 - 4 = -1$ → das Vorzeichen der Ableitung ist Minus.

b) Berechne den Wert der ersten Ableitung *kurz nach der Extremstelle*:

Wähle z. B. $x = 2{,}5$, dann ist $f'(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 4 = 1$ → das Vorzeichen der Ableitung ist Plus.

Fazit: In der Umgebung der Extremstelle $x = 2$ findet ein Vorzeichenwechsel von – nach + statt.

<u>3. Ergebnis:</u> 1. An der Stelle $x = 2$ liegt ein Extrempunkt vor.

2. Wegen des VZW von – nach + handelt es sich um einen Tiefpunkt.